

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE  
CORSO DI STUDI IN FISICA



TESI DI LAUREA TRIENNALE

# Entropia e Termodinamica dei Buchi Neri

*Candidato:*  
**FRANCESCO BATTISTEL**

*Relatore:*  
**Prof. STEFANO ANSOLDI**

Anno Accademico 2014/2015



*Ci sono più possibilità di uscire da un buco nero  
che dalla friendzone.*

Saggezza popolare



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>Notazione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Elementi di teoria dell'informazione</b>	<b>1</b>
1.1 Il concetto di informazione . . . . .	1
1.2 La forma funzionale dell'entropia . . . . .	2
1.3 Proprietà dell'informazione e dell'entropia . . . . .	5
1.4 Entropia come minima lunghezza <i>media</i> del messaggio . . . . .	6
1.5 L'entropia come informazione negativa? . . . . .	7
1.6 Entropia di Shannon e entropia termodinamica . . . . .	8
<b>2 I buchi neri nella teoria della Relatività Generale</b>	<b>11</b>
2.1 Alcune nozioni di geometria differenziale . . . . .	12
2.2 Caratteristiche dello spaziotempo di Schwarzschild . . . . .	17
2.3 Risoluzione delle equazioni di Einstein . . . . .	20
2.4 Il limite Newtoniano delle geodetiche di Schwarzschild . . . . .	24
2.5 Commenti sulla soluzione di Schwarzschild . . . . .	26
2.6 Buchi neri elettricamente carichi e/o rotanti . . . . .	27
<b>3 L'entropia dei buchi neri</b>	<b>29</b>
3.1 L'idea di J. D. Bekenstein . . . . .	29
3.2 La forma per l'entropia dei buchi neri proposta da Bekenstein . . . . .	30
3.3 La prima legge della termodinamica dei buchi neri . . . . .	32
3.4 La funzione di partizione per un buco nero . . . . .	33
3.5 Principi della termodinamica dei buchi neri . . . . .	35
3.6 La legge dell'aumento dell'area di S. Hawking: una possibile violazione?	36
3.7 Applicazioni del concetto di entropia dei buchi neri . . . . .	40
3.7.1 Oscillatore armonico . . . . .	47
3.7.2 Fascio di luce . . . . .	49
3.8 Proposte alternative all'entropia di Bekenstein per i buchi neri . . . . .	51
<b>Conclusioni</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>



# Introduzione

L'energia può trasformarsi in modo relativamente facile da una forma all'altra: cinetica, potenziale, elettrica, nucleare, chimica... La scienza che studia tali trasformazioni è la termodinamica. Vi sono, tuttavia, dei limiti a queste trasformazioni, in particolare alla quantità di energia "utile" che può essere estratta da un sistema fisico. La grandezza termodinamica responsabile di ciò è la cosiddetta entropia, della quale si dice che stima il grado di "disordine" di un sistema.

Il secondo principio della termodinamica, infatti, afferma che l'entropia dell'universo aumenta costantemente e inesorabilmente: se una parte di esso viene ordinata, ce ne deve essere un'altra in cui si è creato almeno altrettanto disordine.

Shannon [9] mise in luce nel 1948 il legame tra i concetti di entropia e informazione. Un aumento della prima corrisponde a una perdita della seconda; viceversa, se assumo informazione su un sistema, ne sto riducendo l'entropia poiché, mentre il disordine va inteso come "incertezza su dove si trovino esattamente le cose", una volta che acquisisco tale conoscenza, avrò meno indecisione e mi sembrerà che l'insieme possieda un suo particolare ordine.

Nell'ambito fisico apparentemente molto diverso della relatività generale, d'altra parte, la teoria prevede l'esistenza di oggetti massivi ed estremamente densi, tali per cui neanche la luce riesce a sfuggire alla loro gravità. A un osservatore esterno non arriverà mai nessun segnale da tale zona dello spazio(tempo), che gli apparirà come un "buco nero" [8].

Allo stato attuale della conoscenza di questi oggetti, sappiamo che all'esterno sono caratterizzati solo da massa, carica elettrica e momento angolare. Ciò significa che due buchi neri con gli stessi parametri sono perfettamente identici, indipendentemente dalla loro storia. Un risultato di cruciale importanza è stato ottenuto da Stephen Hawking, secondo il quale l'area dell'orizzonte degli eventi (il limite oltre cui nulla, nemmeno la luce, non può più sfuggire) aumenta in seguito a qualsiasi processo che coinvolga uno o più buchi neri [6].

A parità di massa, un buco nero elettricamente carico possiede un'area inferiore rispetto a uno scarico. Nel paragrafo 3.6 ho provato a violare la legge di Hawking, "lanciando" una sfera carica contro un buco nero

scarico, ma è risultato che tale legge mantiene la sua validità, tenendo conto in modo opportuno delle leggi della fisica.

Fu proprio questo inarrestabile aumento dell'area dell'orizzonte degli eventi a far pensare nel 1973 a J. D. Bekenstein [1] che si potesse stabilire un'analogia tra due campi della fisica così lontani, associando una certa entropia ai buchi neri.

Bekenstein si rese conto che, in presenza di buchi neri, è estremamente facile violare il secondo principio della termodinamica: un oggetto che attraversa l'orizzonte non è più osservabile dall'esterno e, conseguentemente, scompare anche l'entropia termodinamica che era associata a tale corpo. Secondo l'interpretazione di Shannon, se avviene una diminuzione dell'entropia è perché ho guadagnato informazione, tuttavia in questo ragionamento sta avvenendo esattamente il contrario!

Se pensiamo come Bekenstein che il secondo principio debba valere sempre, allora diventa quasi necessario associare un'entropia anche ai buchi neri, da intendersi come "*informazione sull'interno di essi inaccessibile a un osservatore esterno*" [1], tale per cui la somma di entropia dei buchi neri ed entropia termodinamica dell'universo sia in continuo aumento.

Nell'articolo del 1973 Bekenstein pone l'entropia dei buchi neri proporzionale all'area dell'orizzonte degli eventi, mentre il valore oggi accettato della costante di proporzionalità è stato successivamente stabilito da Hawking [10]. Nel corso della tesi vedremo le motivazioni e lo sviluppo di una tale scelta e mostreremo come questa sia efficace in alcuni esempi di rilevante interesse fisico. Valuteremo, infine, proposte alternative a quella di Bekenstein e discuteremo i problemi ancora irrisolti connessi all'entropia dei buchi neri, alcuni dei quali legati alla teoria della radiazione di Hawking [10] e, di conseguenza, al cosiddetto paradosso dell'informazione.



# Notazione

Se non dove diversamente indicato utilizzeremo le unità naturali ( $c = G = \hbar = k_B = 1$ ).

Utilizzeremo il simbolo  $\equiv$  per le definizioni o per imporre uguaglianze (es. per imporre una derivata uguale a 0 nella ricerca di un minimo).

Gli indici tensoriali possono assumere i valori 0,1,2,3, etichettati in alcuni casi con  $t, r, \theta, \phi$ .

Utilizzeremo la convenzione di Einstein, per cui indici ripetuti in alto e in basso sottintendono la sommatoria:  $A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu$ .

La metrica, indicata  $g_{\mu\nu}$ , sarà sempre lorentziana con segnatura 2, per cui gli intervalli *timelike* saranno negativi, quelli *spacelike* positivi.

Il simbolo  $\nabla$  indica la derivazione covariante, che considereremo sempre compatibile con la metrica.

I vettori tridimensionali sono indicati in grassetto:  $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3)$ . Indicheremo con  $\times$  il prodotto vettoriale, con  $\cdot$  il prodotto scalare tra grandezze di questo tipo.

Una barra sopra una lettera indica una media. Ad esempio  $\bar{E} \equiv \sum_{i=1}^N p_i E_i$  con  $\{p_i\}_{i=1}^N$  una distribuzione di probabilità.

Là dove sono chiari l'indice su cui si sta sommando e i valori che può assumere si scriverà solo il simbolo di somma  $\sum$ .

Una  $*$  in basso per un'applicazione indica il pullback, in alto indica l'aggiunto per un operatore o il duale per uno spazio vettoriale.

La derivata di  $a(t)$  rispetto a  $t$  viene indicata come  $\dot{a}$ .

Se  $X$  è un qualsiasi tipo di applicazione, il valore assunto in  $m$  sarà indicato come  $X|_m$ .



# Capitolo 1

## Elementi di teoria dell'informazione

La teoria dell'informazione come la conosciamo oggi nasce con Claude E. Shannon nel 1948, quando viene pubblicato il suo celebre lavoro “*A Mathematical Theory of Communication*” [9]. Per Shannon il processo di comunicazione coinvolge innanzitutto una sorgente di informazione che produce il messaggio; dopodiché questo tramite un trasmettitore viene trasformato, ed eventualmente codificato, in un segnale, al quale si può sovrapporre del rumore; infine, un ricevitore decodifica il segnale ricevuto, ritrasformandolo nel messaggio che arriva così a destinazione.

Qui trascureremo tutti gli aspetti più ingegneristici della comunicazione, inclusi la codifica e la trasmissione del messaggio, nonché la questione del rumore e della capacità di un canale di trasmettere informazione. Ci concentreremo invece sul nucleo della teoria di Shannon, riguardante il concetto matematico di informazione e della grandezza più importante che vi è associata, ovvero l'entropia.

### 1.1 Il concetto di informazione

Il primo malinteso che può nascere parlando di informazione in quest'ambito riguarda il significato che uno può associare a una serie di lettere, simboli e/o “portatori di informazione” in generale, che possono codificare lo stato in cui si trova, ad esempio, un sistema fisico.

Il concetto matematico di *informazione* è infatti completamente scollegato da quello di *significato*, ma dipende esclusivamente dalla distribuzione di probabilità delle varie forme che possono assumere i portatori di informazione. Più del messaggio, quindi, ciò che conta è fra quanti differenti messaggi posso scegliere e quanto frequentemente ne scelgo alcuni piuttosto che altri (non è necessario un soggetto pensante ma potrebbe trattarsi, e in termodinamica si tratterà, di un sistema fisico che può assumere varie differenti configurazioni, alcune più probabili di altre).

Facciamo un esempio che riguarda il linguaggio. Supponiamo che un amico scelga una parola a caso dal dizionario e mi sfidi ad indovinarla con il minor numero di aiuti possibili. Supponiamo inoltre di trattare le parole come mere stringhe di lettere prive di qualsiasi significato, per cui non potremo fare alcun riferimento ad esso per indovinare la parola.

Il mio amico potrebbe rivelarmi la prima lettera della parola che ha scelto. A seconda della lettera che mi rivela potrei essere in grado di restringere il campo in varie misure: se la prima lettera fosse ad esempio una “a” non sarebbe un grande aiuto, perché ci sono moltissime parole che cominciano con la “a”, ma se mi dicesse che è una “z”, allora se dovessi tirare a caso avrei molte più probabilità di azzeccarci. In questo caso, quindi, possiamo dire che una “z” porta molta più informazione di una “a”, per il fatto che la frequenza con cui appare come prima lettera di una parola è molto inferiore.

Supponiamo a questo punto di ripetere più e più volte questo gioco, in cui ogni volta il nostro amico sceglie una nuova parola dal dizionario. Come possiamo quantificare l’informazione *media* che otteniamo dalla conoscenza della prima lettera della parola? Che misura possiamo usare?

## 1.2 La forma funzionale dell’entropia

Si può partire dalle proprietà che vogliamo che siano soddisfatte da una misura dell’informazione (media). Sia  $\{p_i\}_{i=1}^n$  la densità di probabilità della variabile casuale che consideriamo e sia  $S[p_1, \dots, p_n]$  il funzionale di cui cerchiamo la forma, che in seguito chiameremo entropia. Richiediamo che valgano le seguenti proprietà:

1. un piccolo cambiamento nelle  $p_i$  deve causare un piccolo cambiamento in  $S$ , cioè  $S$  dev’essere continua;
2. se tutti gli eventi sono equiprobabili,  $p_i = \frac{1}{n} \forall i$ ,  $S$  dev’essere monotona crescente:

$$S\left[\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right] \leq S\left[\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right] \quad \text{per } m \geq n. \quad (1.1)$$

Ci aspettiamo infatti che l’informazione sia maggiore se ho un numero maggiore di eventi, tutti sempre equiprobabili;

3. sia  $\bar{p} = \sum_{i=1}^m p_i$ ,  $m < n$ , allora vogliamo che

$$S[p_1, \dots, p_n] = S[\bar{p}, p_{m+1}, \dots, p_n] + \bar{p} S\left[\frac{p_1}{\bar{p}}, \dots, \frac{p_m}{\bar{p}}\right]. \quad (1.2)$$

Questa proprietà corrisponde a richiedere che, se calcolo l’entropia in maniera diretta o in più passaggi, arrivando però alla fine a considerare la medesima densità di probabilità, il risultato dev’essere lo stesso in entrambi i casi; si veda come esempio la figura 1.1.

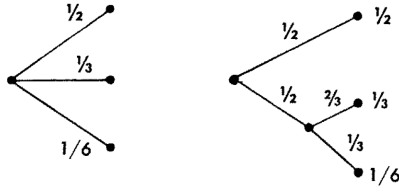


Figura 1.1: Esempio per la proprietà 3 in cui arrivo alla stessa distribuzione di probabilità ma nel secondo caso in due step. Per l'entropia in questo esempio specifico richiediamo che  $S[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}] = S[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] + \frac{1}{2}S[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ , dove il fattore un mezzo è dovuto al fatto che la seconda scelta si verifica la metà delle volte. Figura tratta da [9].

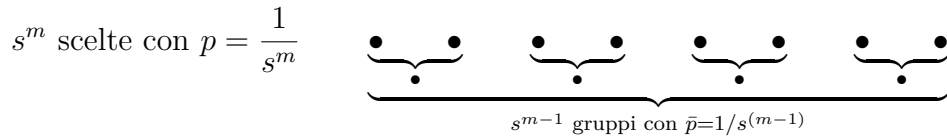
Si ha il seguente:

**Teorema 1.** *Esiste un unico funzionale  $S$ , definito a meno di una costante  $K > 0$ , per il quale valgono le tre proprietà sopra enunciate, con la condizione che  $S[1] = 0$ :*

$$S[p_1, \dots, p_n] = -K \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i). \quad (1.3)$$

*Nota 1.* La base del logaritmo non è importante, purché maggiore di 1, poiché il cambio di base può essere assorbito nella costante, la quale rappresenta semplicemente un fattore di scala o l'unità di misura. Nel seguito per convenzione sottintenderemo l'utilizzo della base 2.

*Dimostrazione.* Definiamo  $A(n) \equiv S[\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]$ . Suddividiamo le  $n$  possibilità in una serie di  $m$  scelte ciascuna tra  $s$  possibilità, cioè sia  $n = s^m$  (questo non sarebbe sempre esattamente possibile, ma per  $n$  grandi l'errore diventa trascurabile). Raggruppando ciascuno degli  $s^{m-1}$  gruppetti nel primo strato di scelte in una  $\bar{p}_i = 1/s^{(m-1)} \forall i = 1, \dots, s^{m-1}$ , come nell'esempio qui sotto con  $s = 2$  e  $m = 3$ ,



e usando iterativamente la proprietà 3, si ottiene:

$$\begin{aligned} A(s^m) &= S\left[\frac{1}{s^{m-1}}, \frac{1}{s^m}, \dots, \frac{1}{s^m}\right] + \frac{1}{s^{m-1}} A\left(\frac{s^m}{s^{m-1}}\right) \\ &= \dots = A(s^{m-1}) + \sum_{i=1}^{s^{m-1}} \frac{1}{s^{m-1}} A(s) \\ &= A(s^{m-1}) + A(s). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ripetendo lo stesso procedimento sul secondo strato e così via si ottiene

$$\begin{aligned} A(s^m) &= A(1) + mA(s) \\ &= mA(s). \end{aligned} \quad (1.5)$$

e analogamente

$$A(t^q) = qA(t). \quad (1.6)$$

Fissati  $s, m, t$  posso sempre trovare un  $\bar{q}$  tale che

$$\begin{aligned} t^{\bar{q}} &\leq s^m \leq t^{\bar{q}+1} \\ \implies \bar{q} \log t &\leq m \log s \leq (\bar{q} + 1) \log t \\ \implies 0 &\leq \frac{\log s}{\log t} - \frac{\bar{q}}{m} \leq \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

In più, per la monotonia di  $A$  (proprietà 2) si ottiene

$$\begin{aligned} A(t^{\bar{q}}) &\leq A(s^m) \leq A(t^{\bar{q}+1}) \\ \implies \bar{q}A(t) &\leq mA(s) \leq (\bar{q} + 1)A(t) \\ \implies 0 &\leq \frac{A(s)}{A(t)} - \frac{\bar{q}}{m} \leq \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Sottraendo (1.7) e (1.8) ottengo

$$-\frac{1}{m} \leq \frac{\log s}{\log t} - \frac{A(s)}{A(t)} \leq \frac{1}{m}. \quad (1.9)$$

Poiché deve valere per ogni  $s$  e  $t$  e in particolare per  $m$  molto grandi, dev'essere

$$A(s) = K \log s, \quad \text{con } K > 0 \text{ per la proprietà 2.} \quad (1.10)$$

Vogliamo ora utilizzare questo risultato, valido per distribuzioni uniformi, per generalizzare la formula ad una densità di probabilità generica. Per fare ciò notiamo che, se ad esempio ho una probabilità che vale  $1/5$ , posso vederla come la probabilità totale di 2 eventi equamente probabili, ciascuno con probabilità di  $1/10$ , oppure come la probabilità di 20 eventi con probabilità  $1/100$  e così via. In generale posso trasformare le probabilità nel seguente modo:

$$p_i = N_i \frac{p_i}{N_i} \quad \text{facendo in modo che } \frac{p_i}{N_i} \equiv P \quad \forall i \quad (1.11)$$

per un determinato valore  $P$  (anche in questo caso non si potrebbe sempre fare, come, ad esempio, se qualche  $p_i$  fosse irrazionale, però si può approssimare la distribuzione “vera” bene quanto si vuole).

Notando che per la normalizzazione  $P = (\sum_{j=1}^n N_j)^{-1}$  e che  $p_i = N_i / \sum N_j$ , e utilizzando ripetutamente la proprietà 3 (raggruppo le prime  $N_1$  probabilità  $p_1/N_1$ , poi le successive  $N_2$  e così via) si ottiene:

$$\begin{aligned}
S[P, \dots, P] &= S\left[N_1 \frac{p_1}{N_1}, \dots, N_n \frac{p_1}{N_n}\right] + \sum_{i=1}^n p_i S\left[\frac{p_i/N_i}{p_i}, \dots, \frac{p_i/N_i}{p_i}\right] \\
K \log(\sum N_j) &= S[p_1, \dots, p_n] + K \sum p_i \log N_i \\
S[p_1, \dots, p_n] &= K \left( \sum p_i \log N_i - (\sum p_i) \log(\sum N_j) \right) \\
S[p_1, \dots, p_n] &= -K \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i). \tag{1.12}
\end{aligned}$$

□

### 1.3 Proprietà dell'informazione e dell'entropia

Riassumiamo ora tramite due definizioni i concetti esposti nei precedenti paragrafi:

**Definizione 1** (Informazione). Sia  $\{p_i\}_{i=1}^n$  una densità di probabilità. L'informazione che associamo all'evento  $i$ -esimo, talvolta chiamata auto-informazione, è quantificata da

$$I_i = -\log p_i. \tag{1.13}$$

**Definizione 2** (Entropia). Chiamiamo entropia il valor medio della quantità di informazione, definito a meno di una costante  $K > 0$ , che svolge il ruolo di unità di misura:

$$S[p_1, \dots, p_n] = -K \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i). \tag{1.14}$$

E' evidente che siamo stati indotti a dare le precedenti definizioni dal teorema 1, la cui importanza sta nel dimostrare che la forma dell'entropia dipende esclusivamente dalle tre proprietà enunciate all'inizio del paragrafo precedente, ovvero continuità, monotonia e la ragionevole richiesta che diversi percorsi per calcolarla portino allo stesso risultato.

Tuttavia è degno di nota che le definizioni date di informazione ed entropia soddisfino anche altre proprietà che ci si può aspettare da un'idea intuitiva di tali grandezze. In primo luogo, se si verificano due eventi indipendenti con probabilità  $p_1$  e  $p_2$  ci si aspetta che l'informazione data dalla conoscenza di entrambi sia pari alla somma delle singole informazioni. Infatti:

$$I(p_1 \cdot p_2) = -\log(p_1 \cdot p_2) = -(\log p_1 + \log p_2) = I(p_1) + I(p_2). \tag{1.15}$$

Tabella 1.1: Esempio per indovinare con domande sì/no quale è stata scelta tra le prime 16 lettere dell'alfabeto (A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, O, P, Q, R). In questo caso era stata scelta la H.

Domanda	Risposta
E' tra A e H?	Sì
E' tra A e D?	No
E' tra E e F?	No
E' una G?	No

Inoltre, se i “portatori di informazione” sono tutti uguali fra loro e *indipendenti*, è ragionevole che la misura dell'informazione media, ovvero l'entropia, cresca linearmente con tale numero. Siano  $x_1, \dots, x_n$  le variabili casuali indipendenti corrispondenti a  $n$  portatori. In tal caso la probabilità congiunta si può fattorizzare  $p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1) \dots p(x_n)$ , e come ci si aspetta l'entropia risulta:

$$\begin{aligned}
 S(x_1, \dots, x_n) &= -K \sum_{i_1, \dots, i_n} p(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \log p(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \\
 &= -K \sum_{i_1, \dots, i_n} p(x_{i_1}) \dots p(x_{i_n}) \left( \sum_{j=1}^n \log p(x_{i_j}) \right) \\
 &= -K \sum_{j=1}^n \left( \sum_i p(x_{i_j}) \log p(x_{i_j}) \right) \\
 &= n S(x) \quad \propto \quad n,
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

assumendo che tutte le distribuzioni di probabilità siano uguali a una certa  $p(x)$ .

## 1.4 Entropia come minima lunghezza *media* del messaggio

Analizziamo ora una maniera interessante di vedere il significato di un'entropia ad esempio di 4 bit, che può essere l'entropia delle prime 16 lettere dell'alfabeto italiano assumendo (irrealisticamente) che abbiano una frequenza di utilizzo uniforme. Supponiamo che un amico ne estragga una e che io possa usare solo domande con risposta sì/no per indovinare. Una strategia poco efficiente sarebbe quella di chiedere a casaccio “E' una A?” “E' una P?”. Piuttosto, la strategia migliore è quella di procedere dimezzando ogni volta le possibilità come nella tabella 1.1. Con qualsiasi altro metodo, infatti, anche se in qualche caso fortunato potrebbe bastare una sola domanda, in media ne servirebbero di più.

Possiamo quindi vedere i 4 bit di entropia come il numero minimo di domande con risposta sì/no che mi permettono *in media* di identificare



lo stato del sistema (questa precisazione è importante perché è facile costruire esempi con distribuzioni non-uniformi dove anche con la strategia ottimale può essere necessario un diverso numero di domande, a seconda dello stato del sistema).

Si può notare inoltre come, se io volessi comunicare a qualcuno la lettera che ho indovinato, i 4 bit di entropia rappresentino anche il numero (medio) minimo di bit che mi servono per codificare le 16 lettere, per il fatto che la miglior maniera di comunicarle sarebbe tramite le risposte sì/no alle domande della strategia ottimale. Purtroppo, però, l'entropia mi indica tale numero di bit ma non mi dice nulla su come costruire in generale il miglior algoritmo di codifica per arrivare a tale minimo, nè quindi quale sia la miglior strategia di domande sì/no per indovinare lo stato del sistema.

## 1.5 L'entropia come informazione negativa?

Oltre a queste interpretazioni se ne può dare un'altra del concetto di entropia, cioè come informazione negativa, anche se sarebbe meglio affermare che differenze di entropia corrispondono a differenze di informazione di segno opposto:

$$\Delta I = -\Delta S. \quad (1.17)$$

Questo concetto necessita però di una precisazione.

L'entropia infatti, misurando la quantità di informazione media che ottengo *dopo* aver letto il messaggio, va a misurare contemporaneamente il grado di incertezza che ho *prima* di leggere il messaggio (o, più significativamente dal punto di vista fisico, di fare una misura). Dunque maggiore è l'entropia, maggiore è il grado di imprevedibilità di un sistema, maggiore è il "disordine" in cui si trova. Questo accade per il fatto che il disordine ha molte più configurazioni dei pochi stati che chiamiamo "ordinati", e pertanto risulta molto più imprevedibile!

Dall'altra parte, acquisire informazione va a modificare la distribuzione di probabilità dei messaggi che mi posso aspettare, basti pensare al caso estremo in cui se voglio scommettere su una corsa di cavalli e ho una sfera per guardare nel futuro, una volta che so chi vincerà non ho più incertezza, ma ho probabilità 1 che il mio cavallo arriverà primo!

Vorrei far notare che questo è quello che succede anche in meccanica quantistica, dove l'atto di compiere una misura, ovvero di acquisire informazione, comporta una modifica della distribuzione di probabilità della sovrapposizione di stati in cui si trova un sistema quantistico, facendolo cadere in un autostato. A questo proposito, per evitare fraintendimenti circa il ruolo dell'osservatore, è molto importante ricordare che, in meccanica quantistica, successive misure svolte da altri osservatori vengono comunque influenzate da una misura precedente, indipendentemente dal

fatto che gli altri osservatori sappiano o meno il risultato che è stato ottenuto.

Tornando al concetto di entropia come informazione negativa e volendolo esplicitare quantitativamente, supponiamo di avere una stringa ignota di  $N$  bit, dove ognuno di questi ha probabilità  $1/2$  di valere 0 o 1. L'entropia iniziale (per semplicità sia  $K = 1$ ) è

$$S_i = \log 2^N = N \quad \text{bit.}$$

Se vengo a conoscenza, diciamo, dei primi  $m$  bit, l'informazione che acquisisco è

$$I_f = -\log p = -\log \frac{1}{2^m} = m \quad \text{bit,}$$

dove ho considerato la probabilità  $p$  che gli  $m$  bit acquisiscano quella configurazione. Gli stati possibili quindi per i bit rimanenti sono  $2^{N-m}$ , di conseguenza:

$$\Delta S = S_f - S_i = (N - m) - N = -m \quad \text{bit} \quad (1.18)$$

$$\Delta I = I_f - I_i = m - 0 = m \quad \text{bit,} \quad (1.19)$$

da cui ritrovo la relazione (1.17).

E' rilevante notare, tuttavia, che in generale quando gli eventi non sono tutti equiprobabili può succedere che l'informazione che ottengo da una misura sia maggiore dell'entropia, per il semplice fatto che in generale una grandezza può risultare maggiore del suo valor medio. Pertanto è più corretto dire che differenze di entropia corrispondono a differenze di informazione *media* di segno opposto, dove il meno corrisponde nient'altro che ad un cambiamento di prospettiva tra quello che so *in media* prima e dopo l'atto della misura.

## 1.6 Entropia di Shannon e entropia termodinamica

Finora abbiamo parlato di entropia nell'ambito della teoria dell'informazione, dandone una definizione che apparentemente sembra non avere legami con quella nota dalla termodinamica, dove non si fa alcun riferimento esplicito alla distribuzione di probabilità dei microstati del sistema. Sappiamo però che l'entropia si può esprimere come [7]:

$$S = \frac{\bar{E} - F}{T} \quad (1.20)$$

dove  $\bar{E}$  è l'energia media del sistema (consideriamo in generale un sistema quantistico che può assumere energie  $E_i$  con probabilità  $p_i$ ) e  $F$  è l'energia libera di Helmholtz, che nell'insieme si esprime come  $F = -T \ln Z$  con  $Z$  funzione di partizione (poniamo dappertutto la costante di Boltzmann uguale a 1, che significa misurare la temperatura in unità di energia).

La formula precedente si può quindi esprimere come

$$S = \frac{1}{T} \sum p_i E_i + \ln Z \quad (1.21)$$

$$= - \sum p_i \ln e^{-\frac{E_i}{T}} + (\sum p_i) \ln Z \quad (1.22)$$

$$= - \sum p_i \ln \frac{e^{-\frac{E_i}{T}}}{Z} \quad (1.23)$$

$$= - \sum p_i \ln p_i, \quad (1.24)$$

ricordando che nell'insieme canonico  $p_i = e^{-\frac{E_i}{T}} / Z$ , dove  $Z = \sum e^{-\frac{E_j}{T}}$ .

Abbiamo ritrovato pertanto un'espressione perfettamente analoga all'equazione (1.14), fatto che ci permette di chiamare con lo stesso nome sia l'entropia di Shannon che quella termodinamica.

Il secondo principio della termodinamica asserisce che l'entropia dell'universo è in continuo aumento. Un esempio molto semplice è quello in cui si considera un sistema isolato formato da due sottosistemi a due temperature differenti che vengono poi messi in contatto termico. Quando i due sottosistemi raggiungono l'equilibrio termico, l'entropia finale è maggiore di quella dei due sottosistemi separati essendo il processo irreversibile; in particolare, poiché un sistema isolato all'equilibrio termico non evolve più, l'entropia deve aver raggiunto il suo valore massimo.

E' interessante ricavare da questi ragionamenti la distribuzione di probabilità dell'insieme canonico (distribuzione di Boltzmann) invece che considerarla come nota, massimizzando l'entropia, espressa proprio alla Shannon, ad energia media fissata.

Utilizzando i moltiplicatori di Lagrange per fissare normalizzazione ed energia media, definiamo

$$F(p_1, \dots, p_n, \lambda, \mu) \equiv - \sum p_i \ln p_i + \lambda(\bar{E} - \sum p_j E_j) + \mu(\sum p_l - 1) \quad (1.25)$$

e poniamo

$$\frac{\delta F}{\delta p_k} \equiv 0 \quad \forall k \longrightarrow - \ln p_k - 1 - \lambda E_k + \mu = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{\delta F}{\delta \lambda} \equiv 0 \longrightarrow \bar{E} = \sum p_j E_j \quad (1.27)$$

$$\frac{\delta F}{\delta \mu} \equiv 0 \longrightarrow \sum p_l = 1. \quad (1.28)$$

Da (1.26) possiamo scrivere

$$p_k = e^{-(1-\mu+\lambda E_k)}. \quad (1.29)$$

Sommando su  $k$  e utilizzando la condizione (1.28) si trova:

$$\sum p_k = 1 = (\sum e^{-\lambda E_k}) e^{-(1-\mu)} \equiv Z(\lambda) e^{-(1-\mu)} \quad (1.30)$$

$$\implies \mu = 1 - \ln Z(\lambda) \quad (1.31)$$

$$\implies p_k = \frac{e^{-\lambda E_k}}{Z(\lambda)}. \quad (1.32)$$

Dalla definizione di  $Z(\lambda)$  in (1.30) e utilizzando il vincolo (1.27) risulta:

$$-\frac{\partial \ln Z(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{Z(\lambda)} \sum E_k e^{-\lambda E_k} = \sum p_k E_k = \bar{E}. \quad (1.33)$$

Resta solo da identificare  $\lambda$  con  $1/T = \beta$  sapendo che questa è definita come

$$\beta \equiv \frac{\partial S}{\partial \bar{E}}. \quad (1.34)$$

Sostituendo (1.32) nell'espressione per l'entropia si ha che

$$S = -\sum p_i \ln p_i = -\sum \frac{e^{-\lambda E_k}}{Z(\lambda)} \ln \frac{e^{-\lambda E_k}}{Z(\lambda)} \quad (1.35)$$

$$= \lambda \sum E_k \frac{e^{-\lambda E_k}}{Z(\lambda)} + \frac{1}{Z(\lambda)} (\sum e^{-\lambda E_k}) \ln Z(\lambda) \quad (1.36)$$

$$= \lambda \bar{E} + \ln Z(\lambda). \quad (1.37)$$

Calcoliamo infine (1.34) sfruttando il risultato ottenuto in (1.33):

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \bar{E}} = \lambda + \bar{E} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{E}} + \frac{\partial \ln Z(\lambda)}{\partial \bar{E}} \quad (1.38)$$

$$= \lambda + \bar{E} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{E}} + \frac{\partial \ln Z(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{E}} \quad (1.39)$$

$$= \lambda. \quad (1.40)$$

Riassumendo quanto calcolato, abbiamo trovato che la distribuzione di Boltzmann è proprio quella che massimizza l'entropia per un sistema isolato a temperatura ed energia media fissate. Poiché in tali condizioni l'entropia non può crescere ulteriormente, la distribuzione di Boltzmann deve coincidere con l'effettiva distribuzione di probabilità dei microstati nell'insieme canonico.

## Capitolo 2

# I buchi neri nella teoria della Relatività Generale

Dalla teoria della Relatività Generale è previsto che possano esistere degli oggetti in grado di curvare talmente tanto la geometria dello spazio tempo che neppure la luce può sfuggirvi. Comunemente sono noti come buchi neri [8]. Affinché un corpo possa diventare un buco nero è necessario che tutta la sua massa  $M$  sia compressa in uno spazio molto piccolo, di raggio inferiore al cosiddetto raggio di Schwarzschild, il quale è dell'ordine di

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \frac{M}{M_\odot} \text{ km}, \quad (2.1)$$

con  $M_\odot$  massa del Sole. Per fare un esempio, se la Terra fosse un buco nero dovrebbe avere un raggio di appena 9 mm!

La soluzione delle equazioni di Einstein trovata da Karl Schwarzschild nel 1916, pochi mesi dopo la pubblicazione dell'articolo di Einstein in cui comparve la versione definitiva della teoria della Relatività Generale, è una delle soluzioni più semplici per tali equazioni e allo stesso tempo una delle più utili, grazie a cui sono stati affrontati per la prima volta importanti problemi concettuali.

La soluzione di Schwarzschild è una soluzione di “vuoto”, cioè descrive la geometria dello spaziotempo nello spazio vuoto attorno a un corpo massivo, purché dotato simmetria sferica, come ad esempio una stella. All'interno della stella invece, dove sono presenti una certa distribuzione di massa e una certa pressione, le equazioni cambiano e la soluzione non è più quella di Schwarzschild, con cui però in molti modelli si connette in maniera liscia. Tuttavia qui non ci occuperemo di questo, poiché non ci interessano le dinamiche di una stella, bensì i buchi neri.

Ciò che emerge, infatti, dalla metrica di Schwarzschild è proprio il fatto che, se la massa è racchiusa all'interno del raggio di Schwarzschild, allora lo spaziotempo è così tanto curvato all'interno che qualsiasi cosa vi entri poi non ce la fa più a riemergere, neanche la luce (che per quel

che ne sappiamo va più veloce di qualunque altro oggetto nell'universo!). La superficie che si trova a una distanza dal centro pari al raggio di Schwarzschild è nota col nome di orizzonte degli eventi: essa agisce appunto come una “membrana causale monodirezionale”, ovvero ciò che è dentro può essere influenzato dall'esterno, ma mai il viceversa.

A questo punto un'idea errata che ci si può fare è che l'orizzonte degli eventi sia l'analogo della superficie di una stella e che oltre tale limite si trovi una certa densità di massa estremamente elevata. In realtà, secondo la Relatività Generale è impossibile rimanere a un raggio fissato all'interno dell'orizzonte degli eventi, ma si può solo cadere sempre più verso il centro, dove si trova una cosiddetta “singolarità” in cui la curvatura dello spaziotempo diventa infinita. Tuttavia, cosa rappresenti esattamente una singolarità e come si dovrebbe comportare la materia nelle sue vicinanze non è ancora ben chiaro.

Vi sono poi altri tipi di buchi neri a seconda che siano rotanti, elettricamente carichi o entrambe le cose, a cui corrispondono le metriche di Kerr, Reissner-Nordström e Kerr-Newman, le quali prevedono tutte un orizzonte degli eventi come nel caso di Schwarzschild. Per quel che ne sappiamo non esistono altre tipologie, poiché per il teorema *no-hair* [10] i buchi neri sono caratterizzati all'esterno solo da massa, carica e momento angolare, essendo le uniche grandezze di cui rimane “traccia” nella geometria dello spaziotempo o nel campo elettromagnetico.

## 2.1 Alcune nozioni di geometria differenziale

### Pullback

La definizione di pullback si differenzia leggermente se riferita a una funzione scalare o a una forma differenziale piuttosto che ad un tensore arbitrario (per i concetti matematici qui non definiti si faccia riferimento a [10]), ma l'idea generale è quella di avere due varietà (*manifold*) differenziabili  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$ , un campo sufficientemente regolare su  $\mathcal{N}$  e una applicazione differenziabile  $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , e utilizzare quest'ultima per definire un nuovo campo su  $\mathcal{M}$  che sarà legato all'altro in maniera opportuna.

Nel caso più semplice di una funzione scalare, il pullback di  $f$  sarà una funzione che in  $m \in \mathcal{M}$  dia gli stessi risultati di  $f$  in  $\phi(m) \in \mathcal{N}$ , cioè sarà la composizione di  $f$  con  $\phi$ .

**Definizione 3** (Pullback di una funzione scalare). Siano  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  due varietà differenziabili e sia  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiamo  $\phi_*f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  il pullback di  $f$  rispetto a  $\phi$  nel seguente modo

$$\phi_*f = f \circ \phi. \quad (2.2)$$

Per estendere ora tale a definizione k-forme differenziali e tensori arbitrari, è necessario capire come trasformare i vettori e le 1-forme su

cui questi agiscono. Siano  $V_m$  e  $W_{\phi(m)}$  gli spazi tangenti in un generico punto  $m$  e siano  $V_m^*$  e  $W_{\phi(m)}^*$  i rispettivi duali (detti anche spazi cotangenti). Per trasportare vettori tra spazi tangenti la scelta più naturale è il differenziale di  $\phi$ , per cui definiamo:

**Definizione 4** (Pullback di una 1-forma). Siano  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  due varietà differenziabili e siano  $V_m$  e  $W_{\phi(m)}$  gli spazi tangenti per un generico  $m$ . Sia  $\alpha$  un campo tensoriale del tipo (0,1) su  $\mathcal{N}$  e sia  $v \in V_m$ . Definiamo  $\phi_*\alpha$  il pullback di  $\alpha$  rispetto a  $\phi$ , definito su  $\mathcal{M}$ , come l'applicazione tale per cui

$$(\phi_*\alpha|_m)(v) = \alpha|_{\phi(m)}(d\phi|_m v) \quad \forall v \in V_m, \forall m \in \mathcal{M}. \quad (2.3)$$

Prendendo in prestito dalla meccanica quantistica la notazione di Dirac risulta subito evidente l'interpretazione del pullback di una 1-forma (per chiarezza nella scrittura è stata soppressa la dipendenza da  $m$ ):

$$\langle \phi_*\alpha | v \rangle = \langle \alpha | d\phi v \rangle \quad (2.4)$$

$$= \langle (d\phi)^* \alpha | v \rangle, \quad (2.5)$$

dove si è usata la definizione di aggiunto (ricordiamo che  $d\phi|_m$  è un'applicazione lineare tra gli spazi tangenti  $V_m$  e  $W_{\phi(m)}$ ). Si noti che come convenzione usiamo una  $*$  in basso per indicare il pullback, in alto per l'operazione di aggiunto. Il pullback di un campo tensoriale (0,1) va dunque a coincidere nient'altro che con l'aggiunto del differenziale di  $\phi$ .

Per definire invece il pullback di un campo tensoriale (1,0) è necessario identificare l'operatore che collega gli spazi cotangenti  $V_m^*$  e  $W_{\phi(m)}^*$ . E' chiaro che  $d\phi^*$  non va bene perché va da  $W_{\phi(m)}^*$  a  $V_m^*$ , pertanto bisogna prenderne l'inverso. Tuttavia questo significa che in questo caso, differentemente dal precedente, serve richiedere che  $\phi$  sia un diffeomorfismo e quindi che le due varietà abbiano la stessa dimensione.

**Definizione 5** (Pullback di un vettore). Siano  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  due varietà differenziabili della stessa dimensione e sia  $\phi$  un diffeomorfismo. Sia  $w$  un campo tensoriale del tipo (1,0) su  $\mathcal{N}$  e sia  $\beta \in V_m^*$ . Definiamo  $\phi_*w$  il pullback di  $w$  rispetto a  $\phi$ , definito su  $\mathcal{M}$ , come l'applicazione tale per cui

$$\beta(\phi_*w|_m) = (d\phi^{*-1}|_m \beta)(w|_{\phi(m)}) \quad \forall \beta \in V_m^*, \forall m \in \mathcal{M}. \quad (2.6)$$

Usando anche qui la notazione di Dirac e sopprimendo  $m$  si ha:

$$\langle \beta | \phi_*w \rangle = \langle d\phi^{*-1} \beta | w \rangle \quad (2.7)$$

$$= \langle \beta | d\phi^{-1} w \rangle, \quad (2.8)$$

da cui riassumendo abbiamo le identificazioni

$$\text{Pullback di una 1-forma} \longleftrightarrow d\phi^* \quad (2.9)$$

$$\text{Pullback di un vettore} \longleftrightarrow d\phi^{-1}. \quad (2.10)$$

E' evidente a questo punto che per un campo tensoriale arbitrario sarà:

**Definizione 6** (Pullback di una tensore arbitrario). Siano  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  due varietà differenziabili della stessa dimensione. Sia  $T$  un campo tensoriale del tipo  $(p,q)$  su  $\mathcal{N}$  e siano  $\beta_1, \dots, \beta_p \in V_m^*$  e  $v_1, \dots, v_q \in V_m$  generici per un  $m$  generico.

Definiamo  $\phi_*T$  il pullback di  $T$  rispetto a  $\phi$ , definito su  $\mathcal{M}$ , come l'applicazione tale per cui

$$\phi_*T|_m(\beta_1, \dots, \beta_p, v_1, \dots, v_q) = T|_{\phi(m)}(d\phi^{*-1}\beta_1, \dots, d\phi^{*-1}\beta_p, d\phi v_1, \dots, d\phi v_q). \quad (2.11)$$

### Gruppo a un parametro di diffeomorfismi

Consideriamo ora un insieme di diffeomorfismi  $\phi_t$  che abbia la struttura di gruppo. In generale potrà essere definito solo localmente, ovvero solo su un intorno della varietà  $\mathcal{M}$  ed eventualmente per valori del parametro  $t$  appartenenti ad un intervallo del tipo  $(-\epsilon, \epsilon)$  invece che a tutto  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 7** (Gruppo a un parametro di diffeomorfismi). Un insieme di diffeomorfismi  $\phi_t: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  con  $t \in \mathbb{R}$  forma un gruppo a un parametro se valgono

- $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$
- $\exists$  l'elemento neutro  $\phi_0$  tale che  $\phi_t \circ \phi_0 = \phi_t$
- $\forall \phi_t \exists$  l'elemento inverso  $\phi_{-t}$  tale che  $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0$ .

### Flusso e curve integrali di un campo vettoriale

E' interessante vedere come al gruppo di mappe  $\phi_t$  definito al punto precedente si possa associare in maniera naturale un certo campo vettoriale, facendo uso delle curve sulla varietà che esso va a definire.

Infatti, fissando  $m \equiv \sigma(0) \in \mathcal{M}$  e definendo  $\phi_t(\sigma(0)) \equiv \sigma(t)$ , ottengo una curva  $\sigma$  parametrizzata da  $t$  con la condizione che passi per  $m$  per  $t = 0$ . In ogni punto della curva posso quindi considerare il vettore tangente  $\dot{\sigma}|_{\sigma(t)}$  e al variare di  $t$  ed  $m$  questo mi definisce un campo vettoriale  $\dot{\sigma}$ . La funzione  $\phi_{(\cdot)}(\cdot): (-\epsilon, \epsilon) \times U(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ , dove  $U(\mathcal{M})$  è un intorno di  $m$ , al variare di  $m$  è detto il flusso del campo  $\dot{\sigma}$ .

Tuttavia, spesso è dato un campo vettoriale arbitrario  $X$  di cui si vuole trovare il flusso. Vogliamo quindi definire quest'ultimo facendo il percorso inverso a quanto appena visto.

**Definizione 8** (Curve integrali di un campo vettoriale). Sia  $X$  un campo vettoriale differenziabile definito su  $\mathcal{M}$ . Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{\sigma}(t) = X|_{\sigma(t)} \quad (2.12)$$



con la condizione iniziale

$$\dot{\sigma}(0) = X|_{\sigma(0)}. \quad (2.13)$$

La soluzione  $\sigma(t)$  a tale equazione è detta curva integrale del campo  $X$  passante per  $\sigma(0)$  con vettore tangente  $X|_{\sigma(0)}$ .

Utilizzando questa nozione possiamo quindi definire

**Definizione 9** (Flusso di un campo vettoriale). Sia  $\sigma(t)$  una curva integrale del campo  $X$ . Definiamo il flusso di  $X$  come l'applicazione  $\phi_{(\cdot)}(): (-\epsilon, \epsilon) \times U(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ , dove  $U(\mathcal{M})$  è un intorno di  $\sigma(0)$ , tale che per ogni curva integrale

$$\phi_t(\sigma(0)) = \sigma(t). \quad (2.14)$$

### Derivata di Lie

Definire un'operazione di tipo derivata, in generale per un tensore, su una varietà non è facile né immediato, poiché in principio non abbiamo un modo per relazionare fra loro tensori definiti in punti diversi di  $\mathcal{M}$ .

Per calcolare la derivata di una qualche applicazione  $f$  in un punto  $m$ , infatti, l'idea è sempre quella di prendere  $f$  valutata “vicino” a quel punto, sottrarre  $f$  valutata in  $m$ , dividere per la distanza tra  $m$  e il suo vicino e prendere il limite per questa che va a zero. Un modo per fare questo su una varietà si ottiene sfruttando il pullback rispetto al flusso di un qualche campo vettoriale, relazionando così tensori in punti “vicini” a  $m$  ai tensori definiti proprio in  $m$ , potendone quindi calcolare la differenza.

**Definizione 10** (Derivata di Lie). Sia dato un campo vettoriale  $X$  e sia  $\phi_t$  il flusso di  $X$ . La derivata di Lie di un campo tensoriale arbitrario  $T$  lungo  $X$  è un altro campo tensoriale dello stesso tipo, definito come

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_{t*} T - T}{t} \quad (2.15)$$

Si noti come valutando tale espressione in  $m$  e applicandola a un vettore  $v \in V_m$  e una 1-forma differenziale  $\beta \in V_m^*$  (prendiamo un tensore (1,1) per semplicità) si ottenga

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X T|_m(\beta, v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_{t*} T|_m(\beta, v) - T|_m(\beta, v)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T|_{\phi_t(m)}(d\phi^{*-1}\beta, d\phi v) - T|_m(\beta, v)}{t} \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove apparentemente al numeratore la differenza è valutata tra tensori in punti diversi. Innanzitutto, però, il risultato dell'azione di tali tensori

sui rispettivi argomenti è reale e, comunque,  $T|_{\phi_t(m)}$  appare solo per il fatto che definisce  $\phi_{t*}T|_m$ , il quale è a tutti gli effetti un tensore definito nel punto  $m$ .

Si noti inoltre come al denominatore non compaia una distanza tra i punti  $m$  e  $\phi_t(m)$ , ma semplicemente il parametro  $t$  della curva che tende a zero; non è cioè necessaria una metrica su  $\mathcal{M}$  per definire la derivata di Lie, né tanto meno una connessione.

## Isometrie e campi vettoriali di Killing

**Definizione 11** (Gruppo di isometria). Un gruppo di diffeomorfismi  $\phi_t$  è detto isometria se conserva i prodotti scalari rispetto alla metrica  $g_{\mu\nu}$ , ovvero se

$$\phi_{t*}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Sappiamo che possiamo interpretare  $\phi_t$  come il flusso di un campo vettoriale che chiameremo  $\xi$ , il quale svolge il ruolo di generatore della simmetria.

**Definizione 12** (Campo vettoriale di Killing). Chiamiamo  $\xi$  campo di Killing un campo vettoriale su una varietà  $\mathcal{M}$  che preservi la metrica, ovvero che sia il generatore delle isometrie. Dalle definizioni di isometria e derivata di Lie è evidente che tale condizione si può esprimere come

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

Se utilizziamo un sistema di coordinate su una varietà di dimensione  $n$ , dove come una di esse utilizziamo proprio un parametro  $t$  lungo le curve integrali del campo vettoriale di Killing, questa espressione valutata in un punto  $m \in \mathcal{M}$  con coordinate  $t, x_1, \dots, x_{n-1}$  diventa semplicemente

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} g_{\mu\nu} \Big|_m = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi_{s*}g_{\mu\nu} \Big|_m - g_{\mu\nu} \Big|_m}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi_{s*}g_{\mu\nu}(t, x_1, \dots, x_{n-1}) - g_{\mu\nu}(t, x_1, \dots, x_{n-1})}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_{\mu\nu}(t + s, x_1, \dots, x_{n-1}) - g_{\mu\nu}(t, x_1, \dots, x_{n-1})}{s} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} g_{\mu\nu}(t, x_1, \dots, x_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

ovvero si ha che in tale sistema di riferimento la metrica è indipendente dal parametro considerato!

Per una varietà su cui è definita una connessione è utile esprimere la definizione (10) di derivata di Lie rispetto alla derivata covariante nel seguente modo [10]:

$$\mathcal{L}_X T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} = X^c \nabla_c T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} - \sum_{i=1}^p T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots c \dots a_p} \nabla_c X^{a_i} + \sum_{j=1}^q T_{b_1 \dots c \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \nabla_{b_j} X^c \quad (2.20)$$

Per  $g_{\mu\nu}$ , considerando l'unica connessione simmetrica compatibile con la metrica (connessione di Levi-Civita), si ottiene:

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = X^c \nabla_c g_{\mu\nu} + g_{c\nu} \nabla_\mu X^c + g_{\mu c} \nabla_\nu X^c \quad (2.21)$$

$$= \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu, \quad (2.22)$$

dove si è sfruttato il fatto che la derivata covariante sulla metrica è nulla per la condizione di compatibilità e dove è stata utilizzata la metrica per “abbassare gli indici” (ricordando che, sempre per la compatibilità, la metrica può passare “dentro e fuori” la derivazione covariante).

Dunque per un campo di Killing  $\xi$  abbiamo la caratterizzazione:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad \text{“equazione di Killing”}. \quad (2.23)$$

I campi di Killing possiedono la seguente proprietà, che si rivelerà molto utile:

**Teorema 2.** *Si consideri una varietà  $\mathcal{M}$  dotata di una metrica e della connessione di Levi-Civita. Si consideri  $u$  vettore tangente a una geodetica e sia  $\xi$  un campo di Killing. Allora la quantità  $u^\mu \xi_\mu = g_{\mu\lambda} u^\mu \xi^\lambda$  è costante lungo la geodetica.*

*Dimostrazione.* Vogliamo vedere che la derivata covariante lungo la geodetica di tale quantità sia nulla:

$$\nabla_u (u^\mu \xi_\mu) = u^\nu \nabla_\nu (u^\mu \xi_\mu) \quad (2.24)$$

$$= u^\nu (\nabla_\nu u^\mu) \xi_\mu + u^\nu u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu \quad (2.25)$$

$$= 0 \quad (2.26)$$

poiché il primo termine è nullo per definizione di geodetica [8] e il secondo per l'equazione di Killing (infatti sommando su  $u^\nu u^\mu$  tutti gli indici diventano muti e possono essere opportunamente rinominati).  $\square$

## 2.2 Caratteristiche dello spaziotempo di Schwarzschild

Vogliamo ora risolvere le equazioni di Einstein sotto le opportune ipotesi per ricavare il risultato di Schwarzschild. Tali premesse sono la simmetria sferica, la stazionarietà, la staticità e il fatto che vogliamo che sia una soluzione di vuoto. Si vedrà subito, tuttavia, come la staticità derivi dalle altre, e poi come anche la stazionarietà sia superflua, poiché implicata dalle equazioni di Einstein sotto le uniche condizioni di simmetria sferica e tensore energia-momento nullo (risultato noto come teorema di Birkhoff). Per prima cosa vediamo come sono esattamente definiti i primi tre concetti citati.

**Stazionarietà.** Uno spaziotempo si dice stazionario se possiede un campo di Killing di tipo *timelike*, cioè se esiste un campo le cui curve integrali sono timelike, il cui flusso  $\phi_t$  forma un gruppo di isometria a un parametro che corrisponde alle traslazioni in  $t$ , che chiameremo variabile tempo. L'idea è che  $t$  nella soluzione finale corrisponda a come scorre il tempo per un osservatore posto all'infinito rispetto al buco nero, ma comunque questo non è essenziale.

Cominciamo quindi a costruire un adeguato sistema di riferimento per studiare il problema, prendendo  $t$  come una delle coordinate. Sappiamo quindi dal paragrafo 2.1 che risulta  $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$ , ovvero che i coefficienti della metrica saranno indipendenti dal tempo.

**Staticità.** Uno spaziotempo si dice statico se, oltre ad essere stazionario, esiste una ipersuperficie *spacelike*  $\Sigma$  ortogonale alle curve integrali dell'isometria, cioè se in ogni punto i vettori tangenti a tale ipersuperficie sono ortogonali ai vettori di Killing.

Possiamo utilizzare questo fatto per definire le coordinate “spaziali” nel seguente modo: prendiamo  $x^1, x^2, x^3$  arbitrarie su  $\Sigma$ ; se  $\xi \neq 0$  dappertutto su  $\Sigma$ , allora in un suo intorno ogni punto giacerà su una diversa curva integrale di  $\xi$ . Chiamiamo  $\Sigma_t$  l'immagine di  $\Sigma$  sotto l'azione dell'isometria: essa sarà l'insieme dei punti dello spaziotempo caratterizzati dallo stesso valore della coordinata  $t$ , ciascuno relazionato in maniera univoca ad un punto di  $\Sigma$  con un diverso valore di  $x^1, x^2, x^3$ . Sfruttando questo fatto possiamo quindi “trasportare” il sistema di coordinate di  $\Sigma$  anche su  $\Sigma_t$ ; inoltre, per la simmetria della metrica rispetto alla traslazione in  $t$  abbiamo che  $\xi$  è ortogonale non solo a una superficie ma anche a  $\Sigma_t$  e quindi possiamo ripetere questo procedimento per tutti i valori di  $t$ , finché il campo di Killing non si annulla su una qualche ipersuperficie.

L'utilità di costruire tale sistema di coordinate sta nel fatto che la metrica non potrà contenere dei termini misti del tipo  $dt dx^i$ , perché altrimenti, calcolando il prodotto scalare tra un vettore di Killing in un punto  $m$  e un opportuno vettore dello spazio tangente in  $m$  a  $\Sigma$ , potrei estrarre l'“elemento di matrice”  $g_{tx^i}$  ma, sapendo che i due vettori devono essere ortogonali sempre, questo dovrà per forza essere nullo dappertutto.

A livello fisico, pertanto, la condizione di staticità, unitariamente alla stazionarietà, implica che la metrica sia simmetrica non solo rispetto alle traslazioni temporali ma anche alla riflessione  $t \mapsto -t$  (proprio per la mancanza di termini  $dt dx^i$ ). Si faccia attenzione che in generale una simmetria non implica l'altra, basti pensare a un corpo in moto circolare uniforme: il suo moto si ripete uguale a se stesso nel tempo (stazionarietà), ma invertendo il senso in cui questo scorre si inverte anche la rotazione. Con la condizione di staticità stiamo quindi richiedendo alla soluzione di avere momento angolare nullo.

**Simmetria sferica.** Uno spaziotempo si dice a simmetria sferica se la metrica rimane invariata rispetto alle rotazioni, ovvero se rimane invariata

riata sotto l'azione di  $SO(3)$  e il risultato dell'operazione di tale gruppo su un punto generico è una 2-sfera. La metrica dello spaziotempo quindi indurrà una metrica su ciascuna 2-sfera che per la simmetria sferica dev'essere tutt'al più un multiplo della metrica  $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ , dove si sono impiegate le coordinate sferiche  $(\theta, \phi)$  e dove  $r$  è una funzione definita come

$$r \equiv \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \quad (2.27)$$

con  $A$  area della 2-sfera. In spaziotempo curvo infatti una 2-sfera è sicuramente caratterizzata dalla sua area totale ma non dal suo raggio, inteso come distanza dal centro, poiché semplicemente non è detto che ci sia un centro (es. per uno spazio  $S^3 \times \mathbb{R}$  con  $S^3$  la 3-sfera), anche se ci riferiremo sempre a  $r$  come la coordinata "radiale".

Vogliamo ora far vedere come la staticità sia implicata dalle altre due proprietà. Dobbiamo quindi riuscire a trovare una ipersuperficie *spacelike* ortogonale al campo di Killing. Quest'ultimo dovrà essere anch'esso invariante per rotazione in virtù della simmetria sferica: l'unica maniera in cui un campo non nullo su una sfera può avere tale proprietà è essendo radiale, ovvero ortogonale ai vettori tangenti alla sfera.

La 2-sfera tuttavia non è la  $\Sigma$  che cerchiamo poiché è di dimensione due e non tre; manca da trovare cioè un campo vettoriale le cui curve integrali che originano da una 2-sfera siano ortogonali a  $\xi$ . Il candidato è  $\nabla^\mu r$ ; infatti si ha

$$\xi^\mu g_{\mu\nu} \nabla^\nu r = \xi^\mu \nabla_\mu r = 0, \quad (2.28)$$

risultato che è facile da comprendere in un sistema di coordinate che usi  $t$  e  $r$ , in cui  $\xi^\mu$  ha solo la prima componente non nulla e  $\nabla_\mu r$  solo la seconda. Tuttavia, tale condizione non implica l'ortogonalità di  $\xi^\mu$  e  $\nabla^\mu r$  nel caso in cui uno dei due si annulli. Se quindi considero le curve integrali di  $\nabla^\mu r$  che partono dalla 2-sfera ho trovato la  $\Sigma$  che cercavamo, ma bisogna ricordarsi che il sistema di coordinate  $(t, r, \theta, \phi)$  che abbiamo costruito è valido solo fintanto che  $\xi^\mu \neq 0$  e  $\nabla^\mu r \neq 0$ . Anticipando il risultato questa condizione verrà a mancare proprio sull'orizzonte degli eventi di un buco nero.

Grazie alle simmetrie  $t \mapsto -t, \theta \mapsto -\theta, \phi \mapsto -\phi$ , possiamo dunque semplificare di molto il problema poiché in queste coordinate la metrica diventa diagonale (cambia il segno dei coefficienti fuori diagonale ma per simmetria devono rimanere invariati, quindi devono per forza essere nulli):

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.29)$$

dove rimangono incogniti solo i coefficienti  $g_{tt}$  e  $g_{rr}$ , che dipendono solo da  $r$ .

Tuttavia, vogliamo ora togliere l'ipotesi che la soluzione debba essere stazionaria e vedere se le equazioni di Einstein nel vuoto implicano tale

condizione. Questo corrisponde a reintrodurre una dipendenza da  $t$  nei coefficienti sopra citati, che per comodità nei conti parametrizziamo nel seguente modo:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)} dt^2 + e^{2\beta(t,r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.30)$$

dove  $\alpha(t, r)$  e  $\beta(t, r)$  sono le due funzioni che vogliamo trovare.

## 2.3 Risoluzione delle equazioni di Einstein

A questo punto non resta che risolvere le equazioni di Einstein [8]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

dove  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv G_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein,  $R_{\mu\nu}$  il tensore di Ricci,  $R$  la curvatura scalare e  $T_{\mu\nu}$  il tensore energia-momento.

Vogliamo vedere come è fatta la metrica generata da un corpo massivo però al di fuori dello stesso, per cui prendiamo

$$T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.32)$$

Contraendo quindi (2.31), soggetta a questa condizione, con l'ausilio dell'inverso  $g^{\mu\nu}$  della metrica si ottiene

$$R^\mu{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\mu R = R - 2R = -R \quad (2.33)$$

$$\implies R = 0 \quad (2.34)$$

e reinserendolo in (2.31) troviamo

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.35)$$

che sono le equazioni che vogliamo andare a risolvere.

Per fare ciò abbiamo bisogno innanzitutto di trovare i simboli di connessione (di Christoffel)  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  in funzione della metrica, e poi calcolare  $R_{\mu\nu}$  tramite questi. Sappiamo che i simboli di Christoffel sono legati alla metrica nel seguente modo [8]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (2.36)$$

Utilizziamo le coordinate  $(t, r, \phi, \theta)$  etichettate da 0 a 3 e come notazione usiamo un  $'$  per la derivata rispetto a  $r$  e un  $\dot{\phantom{x}}$  per quella rispetto a  $t$ . La metrica e la sua inversa hanno una forma diagonale (qui e nel seguito  $\alpha$  e  $\beta$  sono da intendersi dipendenti da  $r$  e  $t$  se non dove diversamente

specificato):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

da cui possiamo calcolare:

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} g^{0\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{2} g^{00} (g_{0\mu,\nu} + g_{0\nu,\mu} - g_{\mu\nu,0}) \quad (2.39)$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\alpha} & \alpha' & 0 & 0 \\ \alpha' & \dot{\beta} e^{2(\beta-\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (g_{1\mu,\nu} + g_{1\nu,\mu} - g_{\mu\nu,1}) \quad (2.41)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha' e^{-2(\beta-\alpha)} & \dot{\beta} & 0 & 0 \\ \dot{\beta} & \dot{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r e^{-2\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \sin^2 \theta e^{-2\beta} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (g_{2\mu,\nu} + g_{2\nu,\mu} - g_{\mu\nu,2}) \quad (2.43)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (g_{3\mu,\nu} + g_{3\nu,\mu} - g_{\mu\nu,3}) \quad (2.45)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot \theta \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

A questo punto abbiamo da calcolare il tensore di Ricci (che si ottiene contraendo la corrispondente espressione per il tensore di Riemann):

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu,\sigma}^\sigma - \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \quad (2.47)$$

Calcolandolo “a pezzi” si trova:

$$\Gamma_{\nu\mu,\sigma}^{\sigma} = \begin{pmatrix} (\alpha'' - 2\alpha'(\beta' - \alpha'))e^{-2(\beta-\alpha)} & \dot{\alpha}' & 0 & 0 \\ \dot{\alpha}' & (\ddot{\beta}(\dot{\beta} - \dot{\alpha}))e^{2(\beta-\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} & \dot{\beta}' & 0 & 0 \\ \dot{\beta}' & \beta'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2r\beta' - 1)e^{-2\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2\theta(2r\beta' - 1)e^{-2\beta} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{\sigma\mu,\nu}^{\sigma} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} & \dot{\alpha}' + \dot{\beta}' & 0 & 0 \\ \dot{\alpha}' + \dot{\beta}' & \alpha'' + \beta'' - \frac{2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\Gamma_{\sigma\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) & \alpha'(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) & 0 & 0 \\ \alpha'(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) & \dot{\beta}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})e^{2(\beta-\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (\alpha' + \beta' + \frac{2}{r}) \begin{pmatrix} \alpha'e^{-2(\beta-\alpha)} & \dot{\beta} & 0 & 0 \\ \dot{\beta} & \beta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -re^{-2\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\sin^2\theta e^{-2\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cot\theta}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cot\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B & C & \frac{\cot\theta}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cot\theta}{r} & -2e^{-2\beta} + \cot^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\sin^2\theta e^{-2\beta} - 2\cos^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

con

$$A = \dot{\alpha}^2 + 2\alpha'^2 e^{-2(\beta-\alpha)} + \dot{\beta}^2 \quad (2.52)$$

$$B = \alpha'(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) + \dot{\beta}(\alpha' + \beta') \quad (2.53)$$

$$C = \alpha'^2 + 2\dot{\beta}^2 e^{2(\beta-\alpha)} + \beta'^2 + \frac{2}{r^2} \quad (2.54)$$

Mettendo ora assieme i vari pezzi col giusto segno si ottengono 6 equazioni non banali, di cui però due sono identiche essendo tutto simmetrico,



ovvero  $R_{01} = R_{10}$ . Si ottiene inoltre che  $R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}$ , per cui sono in tutto 4 le equazioni da risolvere.

Semplificando tutto il possibile troviamo innanzitutto che:

$$R_{10} = \frac{2\dot{\beta}}{r} = 0 \quad (2.55)$$

$$\implies \dot{\beta} = 0 \quad \implies \beta = \beta(r) \quad (2.56)$$

ovvero  $\beta$  risulta indipendente dal tempo! Questo ci permette di semplificare ulteriormente le equazioni  $R_{00} = 0$  e  $R_{11} = 0$ , che si riducono a:

$$R_{00} = \alpha'' + \alpha'^2 - \alpha' \beta' + \frac{2\alpha'}{r} = 0 \quad (2.57)$$

$$R_{11} = -\alpha'' - \alpha'^2 + \alpha' \beta' + \frac{2\beta'}{r} = 0 \quad (2.58)$$

da cui sommandole:

$$\frac{2(\alpha' + \beta')}{r} = 0 \quad (2.59)$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial r}(\alpha' + \beta') = 0 \quad (2.60)$$

$$\implies \alpha + \beta = f(t) \quad (2.61)$$

$$\alpha(r, t) = -\beta(r) + f(t) \quad (2.62)$$

dove  $f(t)$  è una qualche funzione di  $t$ .

Inserendo questi risultati in (2.30) la metrica diventa:

$$ds^2 = -e^{-2\beta(r)} e^{2f(t)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.63)$$

Abbiamo la libertà di riparametrizzare la variabile temporale nel seguente modo:

$$T \equiv \int_{t_0}^t e^{f(t')} dt' \quad (2.64)$$

cosicché  $dT^2 = e^{2f(t)} dt^2$ . Rinominando  $T \rightarrow t$  per mantenere l'uso della stessa lettera, che significa semplicemente non aver scelto all'inizio la parametrizzazione "ottimale" per il tempo, rimane ancora da determinare solo  $\beta(r)$ .

Per fare ciò sfruttiamo l'ultima equazione rimasta, quella per  $R_{22}$ :

$$1 - e^{-2\beta(r)} + 2r\beta'e^{-2\beta(r)} = 0 \quad (2.65)$$

$$\implies 1 = e^{-2\beta(r)} - 2r\beta'e^{-2\beta(r)} = \frac{\partial}{\partial r}(re^{-2\beta(r)}) \quad (2.66)$$

$$\implies e^{-2\beta(r)} = 1 - \frac{C}{r} \quad (2.67)$$

per una qualche opportuna costante di integrazione  $C$ , delle dimensioni di una lunghezza. Sostituendo questi risultati nella metrica si ottiene:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.68)$$

## 2.4 Il limite Newtoniano delle geodetiche di Schwarzschild

Come si può notare dall'equazione (2.68), lo spaziotempo di Schwarzschild diventa piatto per  $r \rightarrow \infty$ , ovvero la metrica tende a quella di Minkowski, come ci aspettavamo e come abbiamo in realtà implicitamente imposto con le parametrizzazioni che sono state utilizzate. Resta ora solo da trovare la costante  $C$ , imponendo che, proprio là dove la geometria diventa circa piatta, l'effetto della curvatura sul moto dei corpi sia descrivibile in buona approssimazione con il potenziale gravitazionale di Newton.

Dovremmo quindi risolvere l'equazione delle geodetiche [8]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (2.69)$$

nel limite newtoniano, ovvero a grandi distanze dal centro di attrazione e per corpi che si muovono a velocità piccole rispetto a quella della luce. Tuttavia, invece che risolvere direttamente questa equazioni, vogliamo sfruttare i vettori di Killing della varietà, tramite i quali possiamo calcolare delle grandezze che si conservano lungo le geodetiche, come visto nel teorema 2.

Consideriamo una massa di prova, con massa a riposo  $m$ , che si muova su una geodetica *timelike* (che è l'unica tipo di geodetica su cui si potrebbe mai muovere) e utilizziamo come parametro  $\lambda$  il tempo proprio  $\tau$ . Ripristiniamo per questa sezione l'uso delle unità di misura SI in modo da ottenere il potenziale newtoniano nell'usuale forma.

Per la simmetria rispetto alle traslazioni temporali abbiamo il campo di Killing  $\xi^\mu = \frac{\partial}{\partial(ct)}$  e la corrispondente conservazione di  $\xi^\mu u_\mu$  con  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \dot{x}^\mu$ :

$$\tilde{E} \equiv \frac{E}{mc^2} \equiv -g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu = \left(1 - \frac{C}{r}\right) \dot{t} \quad (2.70)$$

dove sia  $E$  che  $\tilde{E}$ , energia per unità di massa (o meglio per unità di energia a riposo), si conservano, essendo  $m$  anch'essa una costante. L'interpretazione di  $E$  come energia è dovuta al fatto che per  $r \rightarrow \infty$  si ottiene lo spazio della relatività speciale, nel quale risulta  $\dot{t} = dt/d\tau = 1/\gamma$  e quindi  $E = \gamma mc^2$ .

Grazie alla simmetria sferica abbiamo poi anche che  $\rho^\mu \equiv \partial/\partial\phi$  è un campo di Killing (traslazioni in  $\phi$  con  $(r, \theta)$  fissi lasciano la metrica

invariata), per cui abbiamo la conservazione del momento angolare per unità di massa:

$$\tilde{L} \equiv \frac{L}{m} \equiv g_{\mu\nu} \eta^\mu u^\nu = r^2 \dot{\phi}. \quad (2.71)$$

Sempre grazie alla simmetria sferica possiamo scegliere il riferimento per gli angoli in maniera che  $\theta = \pi/2$ , per cui  $\sin^2 \theta = 1$  nella metrica; inoltre, possiamo limitarci a considerare  $d\theta = 0$ . A questo punto possiamo imporre la normalizzazione come in relatività speciale

$$u^\nu u_\nu = -c^2 \quad (2.72)$$

da cui otteniamo

$$-c^2 = -\left(1 - \frac{C}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \quad (2.73)$$

$$= -\left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} c^2 \tilde{E}^2 + \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \quad (2.74)$$

$$\implies -c^2 + \frac{c^2 C}{r} = -c^2 \tilde{E}^2 + \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{C}{r}\right) \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \quad (2.75)$$

$$c^2(\tilde{E}^2 - 1) = \dot{r}^2 - \frac{c^2 C}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} - \frac{C \tilde{L}^2}{r^3}. \quad (2.76)$$

Si noti come questo risultato valga sempre. Prendendo ora il limite a sinistra per energie poco più grandi della massa a riposo:

$$\begin{aligned} c^2(\tilde{E}^2 - 1) &= \frac{1}{m^2 c^2} (E^2 - m^2 c^4) \\ &= \frac{1}{m^2 c^2} (E + mc^2)(E - mc^2) \cong \frac{2}{m} (E - mc^2) \equiv \frac{2}{m} \epsilon \end{aligned} \quad (2.77)$$

dove  $\epsilon$  è l'energia cinetica all'infinito  $\frac{1}{2} m v_\infty^2$ . A destra invece per  $r \rightarrow \infty$  e in particolare per  $r \gg C$ , condizione in cui ci possiamo sempre mettere per quanto grande risulterà  $C$ , possiamo trascurare il termine  $\propto r^{-3}$ . Rimane dunque:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{c^2 C}{2} \frac{m}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (2.78)$$

Nel caso classico per una particella di massa  $m$ , energia  $\epsilon$  e momento angolare  $L$ , in rotazione attorno a una massa  $M$ , sappiamo di dover ottenere

$$\epsilon = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (2.79)$$

per cui comparando le due espressioni troviamo che, affinché relatività generale e gravitazione newtoniana siano concordi in questo limite, dev'essere

$$C = \frac{2GM}{c^2} \equiv r_S \quad \text{“raggio di Schwarzschild”}. \quad (2.80)$$

## 2.5 Commenti sulla soluzione di Schwarzschild

La metrica di Schwarzschild in unità naturali assume la forma definitiva

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.81)$$

La prima osservazione è che ci sono due “singolarità” della metrica per  $r = 0$  e  $r = 2M$ . La prima risulta essere una vera e propria singolarità poiché lì la curvatura scalare  $R_{\mu\nu\sigma\lambda}R^{\mu\nu\sigma\lambda}$  diverge, mentre la seconda è solo una singolarità nelle coordinate, derivante dal fatto di aver scelto delle coordinate che non riescono a coprire tutta la varietà spaziotemporale (operazione che per una varietà qualsiasi non è comunque possibile in generale). Martin Kruskal e George Szekeres [10] trovarono, infatti, tramite un cambiamento di variabili, un sistema di coordinate più adatto a descrivere lo spaziotempo presso l’orizzonte degli eventi, nel quale non v’è segno di alcuna vera singolarità per  $r = 2M$ .

Questo, tuttavia, non toglie il fatto che il raggio di Schwarzschild sia un valore molto particolare per la coordinata radiale. Avevamo anticipato che il sistema di coordinate  $(t, r, \theta, \phi)$  avrebbe cessato di valere là dove  $\xi^\mu$  o  $\nabla^\mu r$  si fossero annullati. Sull’orizzonte succede proprio che

$$\nabla^\mu r = g^{\mu\nu}\nabla_\nu r = g^{11}\nabla_1 r = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Big|_{r=2M} = 0 \quad (2.82)$$

pertanto si perde la condizione di ortogonalità. Inoltre, se ci immaginiamo di estendere le coordinate di Schwarzschild anche per  $r < 2M$  (che matematicamente non è proprio corretto ed è giustificato solamente da ciò che si ottiene usando le coordinate di Kruskal-Szekeres), allora la simmetria per traslazioni in  $t$  c’è ancora ma il corrispondente campo di Killing non è più *timelike*. Per l’appunto  $g_{tt}$  diventa positivo mentre  $g_{rr}$  negativo: si sono scambiati i ruoli di variabile temporale e radiale!

Per questa ragione dunque la metrica all’interno dell’orizzonte non è più per niente statica e diventa impossibile mantenersi a un  $r$  fissato, analogamente a come all’esterno è impossibile bloccare lo scorrere del tempo. In realtà, non bisogna fare confusione tra ciò che chiamiamo coordinata temporale e ciò che invece è il tempo che vediamo scorrere attorno a noi: un osservatore infatti vede sempre il suo tempo proprio; se poi decide di usare quest’ultimo come una delle coordinate è libero di farlo, ma può anche fare una scelta arbitraria per il principio di covarianza generale. Per giustificare la precedente affermazione sarebbe dunque corretto andare a valutare le geodetiche *timelike* all’interno dell’orizzonte e vedere qual è il tempo proprio per un oggetto che si muova lungo tali geodetiche, in relazione alle coordinate utilizzate.

A parte ciò, di per sè oltrepassare l’orizzonte degli eventi non rappresenta nulla di eccezionale, proprio perché la singolarità non esiste, anzi

*localmente* l'orizzonte non è addirittura identificabile. Ci si può calcolare quando lo si dovrebbe attraversare, ma tramite misure locali non ci si potrà mai accorgere di quanto sia curvato lo spaziotempo, essendo la curvatura l'oggetto matematico non-locale per eccellenza: se una persona venisse inghiottita da un buco nero sufficientemente grande, a patto di sopravvivere, non se ne accorgerebbe neppure!

In particolare, un osservatore in caduta libera verso un buco nero vi finirebbe dentro in un tempo finito secondo il suo stesso orologio, mentre secondo un osservatore lontano e stazionario sarebbe necessario un tempo infinito, ovvero egli non vedrebbe mai l'altro oltrepassare l'orizzonte, ma vedrebbe il suo tempo rallentare sempre di più e osserverebbe che la sua luce subisce un *redshift* sempre maggiore [8]. In breve tempo la sua luce diventerebbe talmente fioca da non essere più praticamente visibile. La capacità di comunicare col primo osservatore diventerebbe inoltre impossibile, perché, oltre un certo limite, un segnale inviato verso di lui non tornerebbe mai indietro, poiché lo raggiungerebbe all'interno del buco nero stesso (il segnale inviato infatti non sarebbe più un sistema di riferimento distante e stazionario).

Questo è ciò che succederebbe anche a una stella che collassa, sempre dal punto di vista dell'osservatore esterno, naturalmente: non la vedremo mai attraversare il suo raggio di Schwarzschild, tuttavia nel giro di qualche secondo non vedremo praticamente più alcuna radiazione raggiungerci. Ci sembrerebbe che la stella sia diventata un "buco nero".

Un'ultima osservazione interessante riguarda il teorema di Birkhoff, il quale afferma, come abbiamo dimostrato, che uno spaziotempo vuoto a simmetria sferica è anche statico (almeno all'"esterno"). Questo significa che se mi trovo a una distanza  $r > 2M$  dal centro, allora qualsiasi processo avvenga all'interno di tale volume non sarà da me rilevabile fino a che la simmetria non è rotta. Il buco nero, ad esempio, non potrà emettere onde gravitazionali, similmente a quanto succede in elettrodinamica, dove una sfera carica pulsante (ovvero un monopolo elettrico) non emette onde elettromagnetiche finché viene mantenuta la simmetria sferica.

Infatti, il vettore di Poynting [5]  $\mathbf{S} \propto \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  dev'essere radiale con  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  nello spazio tangente alla sfera, campi che saranno differenziabili e che potrei utilizzare per costruire un sistema di coordinate sulla sfera. Tuttavia, un qualsiasi sistema su di una sfera ha almeno un punto in cui smette di valere (es. il polo nord in coordinate sferiche), per cui l'unica possibilità, affinché siano differenziabili, è che  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  siano nulli, ma allora non viene emessa radiazione!

## 2.6 Buchi neri elettricamente carichi e/o rotanti

Dopo i buchi neri di Schwarzschild sono state trovate altre soluzioni delle equazioni di Einstein che presentino le caratteristiche di un buco nero,

ovvero fondamentalmente un orizzonte degli eventi.

La metrica di Reissner-Nördstrom [10] è una variante di quella di Schwarzschild nel caso in cui il buco nero possenga una carica elettrica netta  $Q$  ma sia comunque statico:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.83)$$

Si noti come in questo caso ci siano due orizzonti, uno interno e l'altro esterno, corrispondenti a  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ ; nel seguito quello che ci interesserà di più sarà sempre quello esterno.

Se invece il buco nero, oltre che carico, è anche rotante con momento angolare  $L$ , allora la geometria dello spaziotempo è descritta dalla metrica di Kerr-Newman, che in coordinate di Boyer-Linquist [10] si scrive:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2\theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (2.84)$$

dove

$$a = \frac{L}{M} \quad (2.85)$$

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (2.86)$$

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) \quad (2.87)$$

$$= r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (2.88)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta. \quad (2.89)$$

E' interessante notare come tali coordinate non siano sferiche ma si riducano a esse per  $L \rightarrow 0$ . Un buco nero rotante ha dunque un asse di simmetria che corrisponde all'asse di rotazione e la geometria esterna presenta la stessa simmetria, contrariamente a quanto accade in meccanica classica in cui il campo gravitazionale di un corpo non è influenzato dal fatto che quest'ultimo ruoti su se stesso. Si noti che (2.86) vale solo se  $Q^2 + a^2 \leq M^2$ ; se vale l'uguaglianza il buco nero è detto estremo.

Dalla teoria dei buchi neri di Kerr-Newman (o di Kerr se scarichi) emerge una formula, che sarà particolarmente utile nel prossimo capitolo, circa l'area dell'orizzonte degli eventi esterno [10]:

$$\frac{A}{4\pi} = r_+^2 + a^2. \quad (2.90)$$

Per il cosiddetto teorema *no-hair* [10], che è la maniera di indicare tutta una serie di risultati ottenuti circa i buchi neri, questi ultimi sono caratterizzati solo da  $M$ ,  $Q$  ed  $L$ , per cui secondo la teoria attuale non esistono altri tipi di buchi neri oltre a quelli citati e la metrica di Kerr-Newman è quella più generale di tutte in condizioni stazionarie.

## Capitolo 3

# L'entropia dei buchi neri

### 3.1 L'idea di J. D. Bekenstein

Quando un buco nero assorbe materia, questa va a contribuire alla sua massa, quindi al raggio dell'orizzonte degli eventi e di conseguenza alla sua area. In particolare, Stephen Hawking ha formalizzato in maniera precisa quest'idea, dimostrando che in qualsiasi processo l'area dell'orizzonte non può mai diminuire [6].

Fu proprio quest'idea di irreversibilità a far pensare a Jacob Bekenstein che si potesse stabilire un'analogia tra area dell'orizzonte degli eventi di un buco nero ed entropia. Entrambe le quantità, infatti, tendono ad aumentare inesorabilmente nel tempo. Ma l'analogia non si ferma semplicemente qui: l'entropia (riferiamoci per il momento a quella termodinamica) sappiamo essere legata al concetto di informazione, ovvero maggiore è l'entropia che associamo a un sistema, minore è la quantità di informazione che abbiamo su di esso. Più precisamente è sempre meglio parlare di differenze di entropia, pertanto possiamo dire che l'acquisizione di informazione comporta una diminuzione dell'entropia eguale e contraria, mentre un aumento dell'entropia corrisponde a una perdita di informazione.

Come già detto, quando una particella attraversa l'orizzonte degli eventi non è più osservabile dall'esterno, pertanto si perde praticamente tutta l'informazione su di essa. Per il teorema *no-hair* [10] infatti, le uniche caratteristiche di un buco nero "visibili" dall'esterno sono massa, momento angolare e carica elettrica, essendo calcolabili tramite integrali gaussiani. A una tale perdita di informazione viene dunque quasi naturale associare un aumento di un qualche tipo di entropia.

Una terza motivazione per associare un'entropia a un buco nero riguarda la seconda legge della termodinamica, la quale afferma che la variazione dell'entropia dell'universo aumenta in seguito ad un qualsiasi tipo di processo. Tale legge sarebbe facilmente violabile in presenza di un buco nero, poiché assieme ad un corpo che vi cadesse dentro scomparirebbe an-

che l'entropia che era associata a tale corpo. Supponendo che la seconda legge della termodinamica debba rimanere valida, è necessario associare un'entropia al buco nero e generalizzare tale legge, riferendola alla somma di entropia “normale” e entropia dei buchi neri, quest'ultima intesa, secondo quanto afferma Bekenstein, come “*informazione sull'interno di essi inaccessibile ad un osservatore esterno*” [1].

Infine, sappiamo che l'entropia è collegata al concetto di degradazione dell'energia, ovvero al fatto che la quantità di energia da cui si può estrarre del lavoro risulta ridotta in conseguenza di un qualsiasi processo termodinamico [7]. L'analogia con i buchi neri in questo caso riguarda la massa irriducibile di un buco nero, cioè quella quantità di energia (ricordiamo che massa uguale energia) che non è estraibile neanche tramite un processo di Penrose [10]. Christodoulou [3, 4] ha dimostrato che tale quantità è monotona crescente e in particolare che è proporzionale alla radice dell'area dell'orizzonte degli eventi, per cui la si può pensare come una forma di energia degradata, in continuo aumento in seguito all'assorbimento di materia da parte del buco nero.

### 3.2 La forma per l'entropia dei buchi neri proposta da Bekenstein

Il comportamento dell'area dell'orizzonte degli eventi mostra molte somiglianze con quello dell'entropia. Come già citato, infatti, S. Hawking [6] ha dimostrato che essa aumenta sempre nel tempo (in realtà, egli ha anche successivamente ipotizzato quella che è conosciuta come radiazione di Hawking [10], emessa tramite effetti quantistici che porterebbero a lungo andare all'evaporazione di un buco nero, di cui accenneremo più avanti).

In riferimento a un singolo buco nero questa legge si può esprimere come  $d\alpha \geq 0$  con  $\alpha = A/4\pi$  “area razionalizzata” dell'orizzonte degli eventi, tuttavia le legge di Hawking è più vasta, affermando che qualsiasi processo che coinvolga dei buchi neri comporta un incremento dell'area totale. Pertanto bisogna anche aggiungere che, quando due buchi neri si fondono, l'area finale deve essere maggiore della somma delle due aree iniziali.

L'ipotesi quindi per l'entropia di un buco nero è che

$$S \propto f(\alpha) \tag{3.1}$$

dove  $f(\alpha)$  è una qualche funzione monotona crescente dell'area. Seguendo il ragionamento di Bekenstein [1] vogliamo utilizzare alcune motivazioni di tipo fisico per formulare un *ansatz* sulla forma di tale funzione. Un'idea potrebbe essere quella di metterla proporzionale al raggio del buco nero, ovvero fondamentalmente alla  $\sqrt{\alpha}$ . Tuttavia ci sono delle ragioni per escludere quest'ipotesi.



La massa irriducibile  $M_{ir}$  di un buco nero è definita come quella parte di energia che non può essere estratta neanche con un processo di Penrose [10] (una maniera per sottrarre energia cinetica rotazionale a un buco nero di Kerr). Nel caso di un buco nero di Schwarzschild essa coincide con la sua massa totale, che significa che un tale buco nero è come un sistema termodinamicamente morto: non vi si può estrarre lavoro, così come è impossibile estrarre lavoro da una macchina termica che lavori con un unico serbatoio in equilibrio termico.

Tuttavia, se considero due buchi neri di Schwarzschild con masse diverse, è come se avessero due temperature diverse e dunque nel corso della loro fusione può uscire energia sotto forma di onde gravitazionali, ma questo significa che la massa irriducibile finale è minore della somma delle due masse irriducibili iniziali. Se ponessimo l'entropia  $S \propto \sqrt{\alpha} \propto M_{ir}$ , allora l'entropia finale sarebbe minore dell'entropia iniziale, mentre ci aspetteremmo il contrario essendo irreversibile il processo di fusione.

A questo punto la cosa più semplice che si possa pensare è che

$$S \propto \alpha, \tag{3.2}$$

idea che permette immediatamente di trasferire tutti i risultati di Hawking sull'area anche all'entropia dei buchi neri. Una motivazione un po' più fondata a supporto di quest'ipotesi si trova nel paragrafo 3.3, dove differenziando l'espressione (2.90) si trova un risultato analogo al primo principio della termodinamica, in cui al posto di  $dS$  compare  $d\alpha$ . Per il momento vogliamo dare a tale entropia le dimensioni giuste.

Utilizzando solo costanti fondamentali, la scelta più naturale è quella di dividerla per la lunghezza di Planck al quadrato, ovvero per l'area di Planck, la quale purtroppo in unità naturali vale 1 e quindi è difficile apprezzarne la presenza. Usando invece le unità SI si ha  $L_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ ; inoltre, mentre nel capitolo 1 abbiamo misurato l'entropia in unità adimensionali, ripristiniamo temporaneamente anche l'uso della costante di Boltzmann per misurarla in J/K:

$$S \propto \frac{k_B c^3}{G\hbar} \alpha. \tag{3.3}$$

Nell'articolo del 1973 [1] Bekenstein pone la costante di proporzionalità pari a  $\ln 2/2$  in seguito a dei ragionamenti che esplicheremo in 3.7, già dichiarando però che tale valore poteva essere messo facilmente in discussione, ma che comunque il valore corretto non dovesse essere molto lontano. Hawking ha successivamente stabilito che la costante dovrebbe valere  $\pi$  (o  $1/4$  scrivendo  $S$  in funzione di  $A$  invece che  $\alpha$ ), in seguito all'identificazione della radiazione di Hawking con la radiazione di corpo nero emessa da un corpo con una opportuna temperatura, determinata dai parametri che caratterizzano il buco nero [10].

### 3.3 La prima legge della termodinamica dei buchi neri

Vogliamo ora cominciare a costruire una termodinamica per i buchi neri, cercando delle leggi che siano analoghe ai principi della termodinamica.

Per un buco nero di Kerr, ovvero rotante ed elettricamente carico, è noto che, definita l'area razionalizzata

$$\alpha = \frac{A}{4\pi}, \quad (3.4)$$

risulta

$$\alpha = r_+^2 + a^2, \quad (3.5)$$

dove, indicando con  $Q$  carica elettrica,  $\mathbf{L}$  momento angolare e  $\mathbf{a} = \mathbf{L}/M$  momento angolare per unità di massa,

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}. \quad (3.6)$$

Da queste relazioni si ricava anche che:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left( M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \right)^2 + a^2 \\ &= M^2 + M^2 - Q^2 - a^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} + a^2 \\ &= 2M \left( M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \right) - Q^2 \\ &= 2Mr_+ - Q^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Differenziando il risultato precedente otteniamo:

$$\begin{aligned} d\alpha &= 2r_+ dM + 2M dr_+ - 2Q dQ \\ &= 2r_+ dM + 2M \left( dM + \frac{M dM - Q dQ - \mathbf{a} \cdot d(\mathbf{L}/M)}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \right) - 2Q dQ \\ &= \left( 2r_+ + 2M + \frac{2M^2 + 2a^2}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \right) dM - \left( 2Q + \frac{2MQ}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \right) dQ + \\ &\quad - \frac{2\mathbf{a}}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \cdot d\mathbf{L} \\ &= \frac{2r_+^2 + 2a^2}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} dM - \frac{2r_+Q}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} dQ - \frac{2\mathbf{a}}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \cdot d\mathbf{L} \end{aligned} \quad (3.8)$$

da cui esplicitando  $dM$  si ottiene

$$dM = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{2(r_+^2 + a^2)} d\alpha + \frac{r_+Q}{r_+^2 + a^2} dQ + \frac{\mathbf{a}}{r_+^2 + a^2} \cdot d\mathbf{L} \quad (3.9)$$

$$= \frac{r_+ - r_-}{4\alpha} d\alpha + \frac{r_+Q}{\alpha} dQ + \frac{\mathbf{a}}{\alpha} \cdot d\mathbf{L}. \quad (3.10)$$

Definiamo ora le seguenti funzioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Theta = \frac{r_+ - r_-}{4\alpha} & \text{“gravità di superficie”} \\ \phi = \frac{r_+ Q}{\alpha} & \text{“potenziale elettrico”} \\ \Omega = \frac{\mathbf{a}}{\alpha} & \text{“frequenza angolare”}. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Otteniamo quindi una formula che ricorda molto quella che esprime il primo principio della termodinamica, che riporto sotto:

$$dM = \Theta d\alpha + \phi dQ + \Omega \cdot d\mathbf{L} \quad (3.12)$$

$$dE = T dS - p dV. \quad (3.13)$$

Dai risultati di Hawking [6] sappiamo che l'area (razionalizzata o meno) dell'orizzonte degli eventi non può diminuire, ovvero che  $d\alpha \geq 0$ , così come in termodinamica  $dS \geq 0$ . La gravità di superficie dunque svolgerebbe il ruolo della temperatura (in particolare si nota facilmente da (3.9) che è una quantità sempre positiva), mentre  $\phi dQ + \Omega \cdot d\mathbf{L}$  rappresenterebbe il lavoro fatto sul buco nero dall'esterno. Si noti come definire un'entropia comporti anche inevitabilmente la definizione di una “temperatura”.

L'interpretazione fisica di  $\Theta$  come una temperatura termodinamica non è comunque immediata, soprattutto poiché resta da capire se gli si possa assegnare lo stesso significato fisico della temperatura in processi in cui quest'ultima compare. La teoria della radiazione di Hawking suggerisce una risposta positiva: un buco nero infatti emetterebbe radiazione di corpo nero con temperatura  $T \propto \Theta$ , anche se sperimentalmente questo non è stato ancora verificato [10].

### 3.4 La funzione di partizione per un buco nero

Dalla termodinamica sappiamo che sussiste la seguente relazione tra entropia, temperatura, energia media e di Helmholtz [7]:

$$S = \frac{\bar{E} - F}{T} \quad (3.14)$$

che si può esprimere come

$$S = \beta \bar{E} + \ln Z. \quad (3.15)$$

Per calcolare queste quantità si possono fare due percorsi equivalenti partendo dalla distribuzione di probabilità dei microstati:

1. calcolo  $S$  ed  $\bar{E}$  e con queste uso l'equazione (3.15) per trovare  $Z$ ;

2. calcolo  $Z$  e poi la derivo per trovare le altre due grandezze:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad (3.16)$$

$$S = -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\beta} \ln Z \right). \quad (3.17)$$

Se a certe quantità voglio associare il significato che hanno queste grandezze fisiche, esse devono almeno soddisfare tutte le relazioni da (3.15) a (3.17), poiché esse derivano tutte da questo procedimento che ha alla base una certa distribuzione di probabilità (siamo nell'insieme canonico) e che sappiamo essere consistente con se stesso.

Precedentemente abbiamo ricavato la prima legge della termodinamica dei buchi neri, che qui riporto per esteso:

$$\begin{aligned} dM &= \frac{r_+ - r_-}{4\alpha} d\alpha + \frac{r_+ Q}{\alpha} dQ + \frac{\mathbf{a}}{\alpha} \cdot d\mathbf{L} \\ &= \frac{r_+ - r_-}{4k\alpha} d(k\alpha) + \frac{r_+ Q}{\alpha} dQ + \frac{\mathbf{a}}{\alpha} \cdot d\mathbf{L}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

dove, una volta stabilita la proporzionalità tra entropia del buco nero e area dell'orizzonte degli eventi, abbiamo aggiunto la costante di proporzionalità che per il momento possiamo considerare come un parametro libero.

Abbiamo quindi fatto le seguenti identificazioni in base al primo principio della termodinamica:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \longleftrightarrow \bar{E} \\ k\alpha \longleftrightarrow S \\ \frac{4k\alpha}{r_+ - r_-} \longleftrightarrow \beta. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Tramite la formula (3.15) possiamo allora pensare di calcolarci la funzione di partizione per un buco nero, anche se non sappiamo a quali microstati dovrebbe riferirsi.

$$k\alpha = \frac{4k\alpha}{2\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} M + \ln Z \quad (3.20)$$

$$\implies \ln Z = \frac{2k\alpha\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - 4k\alpha M}{2\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \quad (3.21)$$

$$= \frac{\beta}{2} (\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - 2M) \quad (3.22)$$

$$\implies Z = e^{-\frac{\beta}{2}(M+r_-)}. \quad (3.23)$$

Nel caso più semplice di un buco nero di Schwarzschild si ha che

$$\beta_S = \frac{4k(2M)^2}{2M} = 8kM \quad (3.24)$$

$$Z_S = e^{-4kM^2}. \quad (3.25)$$

Utilizzando le relazioni (3.16) e (3.17) verifichiamo per consistenza di ottenere rispettivamente  $\bar{E} = M$  e  $S = 4kM^2$ . Facendo il conto troviamo infatti:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= -\frac{\partial \ln Z_S}{\partial \beta} \\ &= -\frac{\partial M}{\partial \beta} \frac{\partial \ln Z_S}{\partial M} = \frac{1}{8k} \frac{\partial}{\partial M} (4kM^2) \\ &= M \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} S &= -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\beta} \ln Z_S \right) \\ &= -\beta^2 \left( -\frac{1}{\beta^2} \ln Z_S + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z_S}{\partial \beta} \right) = -4kM^2 + 8kM^2 \\ &= 4kM^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.5 Principi della termodinamica dei buchi neri

Siamo partiti dall'idea di associare un'entropia ai buchi neri in maniera da generalizzare il secondo principio della termodinamica e fare in modo che valesse anche in loro presenza. Facendo ciò abbiamo anche definito l'analogo di una temperatura, trovando una legge che possiamo pensare come il corrispettivo del primo principio della termodinamica.

Per completezza possiamo dunque costruire un analogo per tutti i principi della termodinamica classica, da utilizzare come base per una termodinamica dei buchi neri.

- **Legge zero.** Per un buco nero stazionario, l'orizzonte degli eventi possiede gravità di superficie costante.
- **Prima legge.**  $dM = \Theta d\alpha + \phi dQ + \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{L}$  (si veda 3.3).
- **Seconda legge.** La somma di entropia termodinamica  $S$  ed entropia dei buchi neri  $S_{BH}$  (Black Hole) non può mai diminuire:  $\Delta(S + S_{BH}) \geq 0$ .
- **Terza legge.** E' impossibile che si formi un buco nero con gravità di superficie nulla o che un buco nero già esistente raggiunga tale limite.

Si noti come, in base all'espressione (3.11), tale condizione sia esprimibile come  $M^2 < Q^2 + a^2$ , che significherebbe avere un buco nero di Kerr più che estremo: la Relatività di per sè non esclude una tale soluzione alle equazione di Einstein, tuttavia non possederebbe un orizzonte degli eventi e la singolarità sarebbe “visibile”, contrariamente all'ipotesi di “censura cosmica” di Penrose [10].

### 3.6 La legge dell'aumento dell'area di S. Hawking: una possibile violazione?

Il raggio dell'orizzonte degli eventi esterno per un buco nero si esprime nel seguente modo in unità SI (le utilizzeremo eccezionalmente in questa sezione poiché sono utili nella discussione):

$$r = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{G}Q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}c^2}\right)^2 - \left(\frac{L}{cM}\right)^2}. \quad (3.28)$$

Poiché la carica compare con un segno negativo potremmo immaginarci che, aggiungendone qualche unità ad un buco nero scarico, il risultato netto sia una diminuzione del raggio e quindi dell'area dell'orizzonte degli eventi, permettendo potenzialmente a dell'informazione di riemergere da quello che si pensava essere un limite di non ritorno.

Prendiamo per semplicità un buco nero non rotante e inizialmente scarico, di raggio  $r = 2GM/c^2$  e aggiungiamoci un elettrone (carica  $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$  C, massa  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  kg). Il raggio diventa:

$$r' = \frac{G}{c^2}(M + m) + \sqrt{\frac{G^2}{c^4}(M + m)^2 - \frac{G}{4\pi\epsilon_0 c^4}e^2} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{G}{c^2}M + \frac{G}{c^2}m + \sqrt{\frac{G^2}{c^4}(M^2 + 2Mm + m^2) - \frac{G}{4\pi\epsilon_0 c^4}e^2} \\ &\cong \frac{G}{c^2}M + \frac{G}{c^2}m + \sqrt{\frac{G^2}{c^4}(M^2 + 2Mm) - \frac{G}{4\pi\epsilon_0 c^4}e^2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$= \frac{G}{c^2}M + \frac{G}{c^2}m + \frac{G}{c^2}M \sqrt{1 + \frac{2m}{M} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 GM^2}} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} &\cong \frac{G}{c^2}M + \frac{G}{c^2}m + \frac{G}{c^2}M \left(1 + \frac{m}{M} - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 GM^2}\right) \\ &= \frac{2G}{c^2}M + \frac{2G}{c^2}m - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 M} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\equiv r + \Delta r. \quad (3.33)$$

Per dare qualche ordine di grandezza i buchi neri più piccoli che dalla teoria [10] si possono formare per collasso stellare ammontano a poco

più di una massa solare (limite di Chandrasekhar), ovvero circa  $10^{30}$  kg. Pertanto trascurare  $m^2$  in (3.30) è più che giustificato; inoltre il termine sommato a 1 nella radice in (3.31) vale meno di  $10^{-18}$  già per masse irrisionarie di 1 kg, fatto che tranquillamente giustifica lo sviluppo al prim'ordine della radice.

Imponendo  $\Delta r < 0$ , la condizione per  $M$  affinché ciò si verifichi risulta:

$$M < \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 G m} \cong 10^{12} \text{ kg}, \quad (3.34)$$

che corrisponde a un buco nero ipotetico di massa relativamente molto piccola. Inoltre, calcolando  $\Delta r$  per una massa ad esempio di  $10^9$  kg, risulta  $\Delta r = 10^{-54}$  m, che è sicuramente trascurabile rispetto alle fluttuazioni dell'area. Un elettrone da solo, insomma, non permette di sicuro di violare il teorema di Hawking [6].

Questo risultato, tuttavia, sembrerebbe dare delle speranze anche per buchi neri più grandi sommando i contributi di tanti elettroni, anche alla luce del fatto che massa e carica dell'elettrone espresse in metri valgono rispettivamente:

$$\frac{G}{c^2} m = 6.7 \cdot 10^{-58} \text{ m} \quad (3.35)$$

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c^2}} e = 1.4 \cdot 10^{-36} \text{ m}. \quad (3.36)$$

La carica è più grande di ben 22 ordini di grandezza rispetto alla massa di un elettrone, pertanto aggiungendo tanti elettroni a un buco nero si potrebbe sperare di avere alla fine una diminuzione non trascurabile del raggio. Facendo un conto (sbagliato!) per portare il buco nero in una situazione estrema, in cui la carica di  $n$  elettroni eguaglia la massa del buco nero nelle opportune unità di misura, si ha:

$$\frac{G}{c^2} (M + nm) = n \frac{\sqrt{G} e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c^2}} \quad (3.37)$$

$$\implies n \cong \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}{e} M, \quad (3.38)$$

che ad esempio corrispondono a circa  $10^{20}$  elettroni per  $M = 10^{12}$  kg e  $10^{39}$  elettroni per  $M = 10^{30}$  kg, che sono tanti ma in linea di principio non impossibili da trovare.

Il risultato precedente però non tiene conto del fatto che le cariche si respingono tra di loro e quindi c'è dell'energia elettrostatica, la quale in relatività speciale corrisponde a una massa, dividendo per  $c^2$ , che si va a sommare a quella del buco nero al di là della massa dei singoli elettroni.

Facciamo ora il conto corretto. Supponiamo di prendere una sfera conduttrice di raggio  $R$  e di massa trascurabile, caricarla col numero di

elettroni che riteniamo opportuno, lanciarla dentro il buco nero e vedere se e per quali valori di  $n$  e  $R$  il raggio diminuisce oppure no. Il lavoro che devo fare per portare  $n$  elettroni sulla sfera, che corrisponde all'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nella configurazione, vale [5]

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i, \quad (3.39)$$

dove  $V_i$  è il potenziale generato da tutte le cariche tranne l' $i$ -esima. Dividendo per  $c^2$  otteniamo:

$$M_U = \frac{n}{2} e \frac{(n-1)e}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \cong \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{n^2}{R}. \quad (3.40)$$

L'equazione (3.37) va corretta con l'aggiunta del precedente termine:

$$\frac{G}{c^2} \left( M + nm + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{n^2}{R} \right) = n \frac{\sqrt{G}e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c^2}} \quad (3.41)$$

$$\implies \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 R} n^2 + \left( m - \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} \right) n + M = 0 \quad (3.42)$$

Trascurando la massa dell'elettrone si trova:

$$n^2 - \frac{2\sqrt{4\pi\epsilon_0 c^2 R}}{\sqrt{G}e} n + \frac{8\pi\epsilon_0 c^2}{e^2} RM = 0 \quad (3.43)$$

le cui soluzioni sono:

$$n_{1/2} = \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c^2}}{\sqrt{G}e} R \pm \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 c^4}{G e^2} R^2 - \frac{8\pi\epsilon_0 c^2}{e^2} RM} \quad (3.44)$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c^2}}{\sqrt{G}e} R \pm \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 c^4}{G e^2} R^2 - \frac{4\pi\epsilon_0 c^4}{G e^2} R \frac{2GM}{c^2}} \quad (3.45)$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c^2}}{\sqrt{G}e} \left( R \pm \sqrt{R(R - r_s)} \right) \quad (3.46)$$

dove  $r_s = 2GM/c^2$  è il raggio di Schwarzschild del buco nero.

Da (3.46) emerge un fatto degno di nota: se la sfera è più piccola del buco nero non ci sono soluzioni reali! E se la sfera è più grande e mi immagino di costruirla attorno, allora non ci entra! Ho dunque solo una soluzione per  $R = r_s$ , in cui mi posso immaginare che la sfera sia dentro e a quel punto collassi con l'energia elettrostatica che aumenta a spese dell'energia interna (massa) del buco nero. Quello che accade dentro, comunque, non riguarda più me osservatore e "costruttore" esterno che fino a quel momento ha tenuto la sfera in equilibrio con la gravità del buco nero, ma solo le dinamiche interne di quest'ultimo che qui sono



irrilevanti. Valutando  $n$  e  $M_U$  in  $r_S$ :

$$n|_{R=r_S} = \frac{2\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}{e} M \quad (3.47)$$

$$M_U = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{4\pi\epsilon_0 c^4}{Ge^2} \frac{2GM}{c^2} = M. \quad (3.48)$$

La sfera non è diventata solo tanto grande quanto il buco nero, ma anche altrettanto pesante! Tuttavia, proprio questo fatto fa sì che il nuovo raggio del buco nero, ora diventato carico al massimo della sua capacità, diventi:

$$\begin{aligned} r'_S &= \frac{G}{c^2} M' + \sqrt{\left(\frac{GM'}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{GQ'}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c^2}}\right)^2} \\ &= \frac{G}{c^2} M' \\ &= \frac{G}{c^2} (M + M_U) \\ &= \frac{2GM}{c^2} = r_S. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Il raggio rimane esattamente invariato in tutto questo procedimento, in accordo con quanto dice il teorema generale di Hawking per cui l'area dell'orizzonte degli eventi non può che aumentare.

Un altro modo a questo punto per cercare di violare tale legge è quello di non mettersi nella condizione estrema come fatto finora, ma pensare di accontentarsi di una piccola (ma non trascurabile) diminuzione del raggio, utilizzando una quantità di carica inferiore. In tal caso:

$$\begin{aligned} r'_S &= \frac{G}{c^2} (M + M_U) + \sqrt{\frac{G^2}{c^4} (M + M_U)^2 - \frac{Ge^2}{4\pi\epsilon_0 c^4} n^2} \\ &= \frac{G}{c^2} (M + M_U) + \frac{G}{c^2} (M + M_U) \sqrt{1 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G (M + M_U)^2} n^2} \\ &\cong \frac{2GM}{c^2} + \frac{2GM_U}{c^2} - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{n^2}{M + M_U} \\ &\equiv r_S + \Delta r_S. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Imponendo  $\Delta r_S < 0$  analogamente a prima, si trova la condizione per il numero di elettroni:

$$\frac{2G}{c^2} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{n^2}{R} - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{n^2}{M + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{n^2}{R}} < 0 \quad (3.51)$$

$$\implies n^2 < \frac{4\pi\epsilon_0 c^4}{e^2 G} R(R - r_S), \quad (3.52)$$

la quale nuovamente non ha soluzioni per una sfera più piccola del raggio di Schwarzschild (e nemmeno per  $R = r_S$  come nel caso estremo che può quindi essere considerato un caso limite).

In conclusione possiamo dire che la legge dell'energia potenziale elettrostatica, unitamente all'equivalenza di massa ed energia, “cospira” affinché non si possa sfruttare il meno sulla carica in (3.28) in modo da provocare una diminuzione dell'area dell'orizzonte degli eventi di un buco nero di Kerr, in accordo con il teorema di Hawking sull'area. Aggiungere carica, infatti, comporta sempre un'aggiunta di “massa” elettrostatica, oltre alla massa trascurabile dei portatori di carica, tale da giusto giusto impedire una violazione di tale legge. Il massimo che si può ottenere è quello di ritrovarsi con un buco nero carico al limite ma con il doppio della massa e quindi con il raggio che rimane invariato.

### 3.7 Applicazioni del concetto di entropia dei buchi neri

Spinti dall'idea che quando un corpo cade dentro a un buco nero scompare anche l'entropia che era associata ad esso, abbiamo seguito l'idea di Bekenstein [1] di definire un'entropia anche per il buco nero stesso, in modo che la somma di entropia termodinamica e entropia dei buchi neri continui a soddisfare il secondo principio della termodinamica. Vogliamo ora vedere se, con la definizione che abbiamo dato, tale legge è effettivamente verificata almeno in alcuni esempi di rilevante interesse fisico.

Prima di fare ciò ci serve tuttavia un risultato preliminare che ci permetta di porre un limite inferiore all'aumento dell'area di un buco nero quando una particella di massa a riposo  $\mu$  vi finisce dentro. Vedremo come questa stima sia in parte discutibile e in quale ottica debba essere correttamente intesa. Inoltre, si vedrà come sia possibile fare una differente stima studiando il “potenziale efficace” che una particella con momento angolare deve superare per arrivare sull'orizzonte degli eventi.

#### I risultati di Carter e Christodoulou sui buchi neri di Kerr

Consideriamo un buco nero di Kerr-Newman carico e rotante, per il quale la metrica è data dall'equazione (2.84) e successive. Brandon Carter [2] ha dimostrato che una particella che si muova lungo le geodetiche di tale geometria è completamente caratterizzata da quattro integrali primi del moto indipendenti: oltre alla massa a riposo  $\mu$ , all'energia  $E$  e al momento angolare  $L$  della particella, vi è anche un'altra costante  $q$ , nota come “quarta costante di Carter”, che nel caso di un buco nero di Schwarzschild si riduce a  $L^2$  e diventa quindi dipendente dalle altre.

Usualmente tale costante viene scritta come

$$q = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left( a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad (3.53)$$

dove  $p_\theta$  è la componente latitudinale del momento della particella. Poiché sarà utile nel seguito notiamo che, con  $p_\phi$  componente conservata longitudinale di  $L$ , si ottiene che

$$q \geq \cos^2 \theta \left( a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right). \quad (3.54)$$

Utilizziamo poi il seguente integrale primo ottenuto da Christodoulou (tesi di dottorato, non pubblicata)

$$E^2[r^4 + a^2(r^2 + 2Mr - Q^2)] - 2E(2Mr - Q^2)ap_\phi + \\ - [(r^2 - 2Mr + Q^2)p_\phi^2 + (\mu^2 r^2 + q)\Delta + (p_r \Delta)^2] = 0 \quad (3.55)$$

che scriviamo come

$$E^2 A - 2EBap_\phi - (r^2 - 2Mr + Q^2)p_\phi^2 - C = 0 \quad (3.56)$$

che riconosciamo essere un'espressione quadratica per l'energia, dove i coefficienti  $A, B, C$  (che sono funzioni di  $r$ ) sono definiti per comparazione. Risolvendo per  $E$  e tenendo solo la soluzione positiva abbiamo:

$$E = \frac{ap_\phi B + \sqrt{a^2 p_\phi^2 B^2 + A(r^2 - 2Mr + Q^2)p_\phi^2 + AC}}{A} \quad (3.57)$$

$$= \frac{ap_\phi B}{A} + \sqrt{\frac{[a^2 B^2 + A(r^2 - 2Mr + Q^2)]p_\phi^2}{A^2} + \frac{C}{A}} \quad (3.58)$$

Il coefficiente di  $p_\phi^2$  all'interno della radice vale:

$$a^2(4M^2 r^2 + Q^4 - 4MQ^2 r) + r^4(r^2 - 2Mr + Q^2) + \\ + a^2(r^2 + 2Mr - Q^2)(r^2 - (2Mr - Q^2)) = r^4(r^2 - 2Mr + Q^2) + r^4 a^2 \\ = r^4 \Delta \quad (3.59)$$

per cui

$$E = \frac{ap_\phi B}{A} + \sqrt{\frac{r^4 p_\phi^2 \Delta}{A^2} + \frac{1}{A} [(\mu^2 r^2 + q)\Delta + (p_r \Delta)^2]}. \quad (3.60)$$

L'espressione ottenuta non è nient'altro che l'analogo di (2.76) per un buco nero di Kerr-Newman. Riconosciamo che la costante del moto  $E$  (lungo una geodetica) dipende in parte dall'energia cinetica radiale espressa tramite  $p_r$  (quadro) e in parte da un potenziale efficace

$$V(r) = \frac{ap_\phi B}{A} + \sqrt{\frac{r^4 p_\phi^2 \Delta}{A^2} + \frac{1}{A} [(\mu^2 r^2 + q)\Delta]}. \quad (3.61)$$

In realtà, questo non è un vero potenziale e l'interpretazione di  $E$  come “energia cinetica + potenziale” è parzialmente fuorviante, poiché i due contributi non si possono scindere, essendo il contributo “cinetico” sommato a parte del “potenziale” sotto la radice. Tuttavia, ciò non toglie il fatto che, se  $E < V$  in qualche  $r$ , allora ci sono zone inaccessibili alla particella, almeno ad un livello non-quantistico.

Procediamo con l'analisi di Christodoulou. Essendo interessati a quello che succede sull'orizzonte degli eventi, valutiamo i coefficienti che compaiono in (3.60) per  $r = r_+$ . Ricordando che  $\alpha = r_+^2 + a^2 = 2Mr_+ - Q^2$  si trova che:

$$B_+ \equiv B(r_+) = 2Mr_+ - Q^2 = r_+^2 + a^2 \quad (3.62)$$

$$A_+ \equiv A(r_+) = r_+^4 + a^2(r_+^2 + 2Mr_+ - Q^2) = (r_+^2 + a^2)^2 \quad (3.63)$$

$$\Delta_+ \equiv (r - r_+)(r - r_-)|_{r_+} = 0. \quad (3.64)$$

Pertanto sull'orizzonte i primi due termini sotto radice si annullano, ma in generale non  $p_r \Delta$ , grazie al fatto che  $g_{rr}$  nella metrica diverge:

$$p_r \Delta = g_{rv} p^v \Delta = g_{rr} p^r \Delta = \frac{\Sigma}{\Delta} p^r \Delta = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) p^r. \quad (3.65)$$

Inserendo questi risultati in (3.60) e ricordando (3.11) abbiamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{a}{r_+^2 + a^2} p_\phi + \frac{|p_r \Delta|_+}{\sqrt{A_+}} \\ &= \Omega p_\phi + \frac{|p_r \Delta|_+}{r_+^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Quindi, quando la particella considerata viene catturata dal buco nero, la massa di quest'ultimo viene incrementata di  $E$  e il suo momento angolare di  $p_\phi$ ; per (3.12) la variazione dell'area vale:

$$E = \Theta d\alpha + \Omega p_\phi \quad (3.67)$$

$$\implies d\alpha = \frac{E - \Omega p_\phi}{r_+ - r_-} 4\alpha = 4 \frac{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r_+ - r_-} p^r \geq 0 \quad (3.68)$$

e in particolare è nulla solo per  $p^r = 0$ , ovvero quando considero un'energia  $E$  tale per cui il momento radiale si annulli in  $r_+$  a momento angolare fissato.

Commentando quanto fatto, possiamo dire che questo risultato, ottenuto da Christodoulou, è l'analogo per il momento angolare di quello discusso in precedenza per la carica elettrica: si cerca di sfruttare il meno che c'è davanti a queste grandezze nella formula (3.6) per causare una diminuzione dell'area, cercando di vedere se una particella con sufficiente momento angolare può riuscirci, ma il massimo che si riesce ad ottenere è che l'area rimanga invariata, poiché si trova che c'è una relazione tra

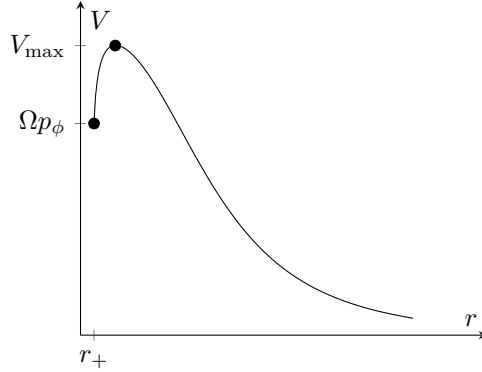


Figura 3.1: Andamento del potenziale (3.69): parte da  $r_+$  col valore  $\Omega p_\phi$  e poi raggiunge un massimo. Un fotone deve avere energia almeno superiore a tale massimo per superare la barriera e arrivare sull'orizzonte.

momento angolare e minima energia che la particella deve possedere. Similmente in 3.6 avevamo trovato che  $n$  particelle cariche contribuivano inevitabilmente con una certa quantità di energia elettrostatica.

Questo chiaramente va a confermare la legge di Hawking sull'aumento dell'area [6], però va a porre dei problemi quando si va a ipotizzare una proporzionalità tra l'area e l'entropia dei buchi neri. Soprattutto, il fatto che ci siano queste due possibilità teoriche per far finire qualcosa, dotato di entropia termodinamica, dentro un buco nero, senza che aumenti l'entropia di quest'ultimo, sembrerebbe violare il secondo principio della termodinamica che invece si voleva preservare.

Analizziamo meglio il potenziale (3.61). Per semplicità prendiamo una particella senza massa con  $\mu = 0$ , come faremo nella sezione 3.7.2 prendendo un raggio di luce composto da fotoni. In tal caso abbiamo

$$V(r) = \frac{ap_\phi B}{A} + \sqrt{\frac{r^4 p_\phi^2 \Delta}{A^2} + \frac{q\Delta}{A}} \quad (3.69)$$

il cui andamento è mostrato in figura 3.1. In  $r_+$  vale  $\Omega p_\phi$ , cresce fino a un massimo e poi si annulla per  $r \rightarrow \infty$ . In particolare il massimo si alza per  $p_\phi$  che aumenta, perché più momento angolare ha la particella più è probabile che riesca a sfuggire dal buco nero. Il fotone considerato deve avere pertanto  $E \geq V_{\max}$  per superare la barriera di potenziale e arrivare sull'orizzonte.

Vogliamo usare questa osservazione per minimizzare  $\Delta\alpha$  in tale situazione a  $p_\phi$  fissato, che significa prendere  $q$  possibilmente negativa, in modo da far abbassare il massimo il più possibile, e poi prendere proprio  $E = V_{\max}$ . Sappiamo da Carter [2] che in tali condizioni per  $q < 0$  si ha  $|p_\phi| < aE$ , da cui utilizzando (3.12):

$$\Delta\alpha = \frac{1}{\Theta}(E - \Omega p_\phi) > \frac{1}{\Theta}E(1 - \Omega a) > 4ME \quad (3.70)$$

poiché

$$a\Omega = \frac{a^2}{r_+^2 + a^2} \leq \frac{a^2}{(2a^2)} = \frac{1}{2} \quad (3.71)$$

e

$$\Theta \leq \frac{1}{8M}, \quad (3.72)$$

risultato che si ottiene grazie al fatto che la derivata di (3.11) rispetto ad  $a$  è sempre negativa e che  $\Theta$  assume il suo valore massimo per  $a = 0$  (buco nero di Schwarzschild).

Se invece  $q = 0$  si trova numericamente che per  $a \rightarrow M$  il minimo decresce e il limite inferiore di  $\Delta\alpha_{\min}$  converge a

$$\Delta\alpha \geq 4 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ME. \quad (3.73)$$

Riassumendo possiamo dire che

$$\Delta\alpha \geq \eta ME \quad (3.74)$$

con  $\eta$  una costante che si riduce da 8 per un buco nero di Schwarzschild a  $4(1 - \sqrt{3}/2)$  per un buco nero di Kerr estremo.

## Il minimo aumento dell'area secondo Bekenstein

La situazione trovata da Christodoulou, in cui una particella viene inglobata in un buco nero senza che l'area di questo aumenti (analogamente a quanto trovato nella sezione 3.6 per la carica elettrica), è una situazione che da un certo punto di vista non dovrebbe verificarsi, poiché la particella dovrebbe arrivare sull'orizzonte con un'energia  $\Omega p_\phi$ , ma con tale  $E$  non riuscirebbe a superare effettivamente la barriera di potenziale (3.61). Potremmo però immaginarci che la superi con un'energia superiore e poi la ceda, ad esempio tramite un urto, ad un altro corpo prima di finire dentro il buco nero con l'energia giusta.

Tale condizione è evidentemente una situazione limite e quindi è facile trovare un'approssimazione su cui si basa e far vedere che, tenendone invece conto, nella realtà non si può in ogni caso arrivare veramente a tale limite. Nello specifico, nel paragrafo precedente abbiamo assunto implicitamente che la particella in questione fosse puntiforme, mentre se vi vogliamo associare una dimensione, diciamo un raggio  $b$  che possiamo stimare alla peggio con il valore più grande tra la sua lunghezza Compton e il suo raggio gravitazionale [1], allora non dobbiamo valutare l'energia che serve per arrivare in  $r_+$  con  $p^r = 0$ , bensì in un punto "vicino"  $r_+ + \delta$ , da trovare risolvendo l'equazione per la lunghezza propria lungo

una geodetica radiale:

$$b = \int_{r_+}^{r_++\delta} \sqrt{g_{rr}} dr \quad (3.75)$$

$$= \int_{r_+}^{r_++\delta} \sqrt{\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{(r - r_+)(r - r_-)}} dr. \quad (3.76)$$

Considerando un buco nero di Kerr non estremo, ovvero  $r_+ \gg r_-$  troviamo

$$b \cong \sqrt{\frac{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r_+ - r_-}} \int_{r_+}^{r_++\delta} \frac{1}{\sqrt{r - r_+}} dr \quad (3.77)$$

$$= 2\sqrt{\delta} \sqrt{\frac{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r_+ - r_-}}. \quad (3.78)$$

Calcoliamo ora l'energia necessaria per giungere in  $r_+ + \delta$  con  $p^r$  nullo, poiché sappiamo che questa condizione minimizza l'incremento dell'area. Volendola sviluppare al prim'ordine in  $b$ , teniamo solo i termini  $\propto \sqrt{\delta}$ , cioè i termini  $\propto \delta$  sotto la radice. Si noti come  $\Delta|_{r_++\delta} \cong 2(r_+ - M)\delta = (r_+ - r_-)\delta$ . Per cui:

$$\begin{aligned} E &\cong \Omega p_\phi + \sqrt{\frac{r_+^4 p_\phi^2 (r_+ - r_-)\delta}{((r_+ + \delta)^2 + a^2)^4} + \frac{(\mu^2 r_+^2 + q)(r_+ - r_-)\delta}{((r_+ + \delta)^2 + a^2)^2}} \\ &\cong \Omega p_\phi + \frac{\sqrt{(r_+ - r_-)}}{r_+^2 + a^2} \sqrt{\delta} \sqrt{\frac{r_+^4 p_\phi^2}{(r_+^2 + a^2)^2} + \mu^2 r_+^2 + q} \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} &\cong \Omega p_\phi + \frac{(r_+ - r_-)b}{2(r_+^2 + a^2)\sqrt{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta}} \sqrt{\frac{r_+^4 p_\phi^2}{(r_+^2 + a^2)^2} + \mu^2 r_+^2 + q} \\ &\geq \Omega p_\phi + \frac{(r_+ - r_-)b}{2(r_+^2 + a^2)\sqrt{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta}} \sqrt{\mu^2 r_+^2 + q} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Vogliamo ora utilizzare la stima (3.54) per  $q$ . Sapendo (3.71), segue che

$$q \geq \mu^2 a^2 \cos^2 \theta. \quad (3.81)$$

per cui

$$E \geq \Omega p_\phi + \frac{1}{2} \mu b \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2}. \quad (3.82)$$

Usando infine l'equazione (3.12) otteniamo il risultato di Bekenstein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2} d\alpha = E - \Omega p_\phi &\geq \frac{1}{2} \mu b \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2} \\ \implies d\alpha &\geq 2\mu b. \end{aligned} \quad (3.83)$$

La minima variazione dell'area risulta dunque essere

$$(\Delta\alpha)_{\min} = 2\mu b. \quad (3.84)$$

Questo risultato è un po' anomalo rispetto a quanto ci si potesse aspettare in base a ciò che è stato detto finora sui buchi neri. Infatti, abbiamo visto che per il teorema *no-hair* [10] un buco nero e conseguentemente la sua area possono dipendere solo da massa, carica e momento angolare del buco nero stesso, mentre qui entra in gioco anche il raggio della particella, il quale, a parte il fatto di non essere ben definito, non dovrebbe invece essere importante. Se facessimo infatti dipendere la variazione dell'area anche dalle dimensioni dei corpi che vi cadono dentro, allora l'area totale dipenderebbe anche dalla storia degli oggetti che il buco nero ha inglobato nel corso del tempo, contraddicendo però il teorema citato.

Inoltre, si può notare come questo risultato sia indipendente proprio dai parametri caratterizzanti un buco nero, fatto che lo renderà particolarmente utile nel seguito come stima da utilizzare per tutti i tipi di buchi neri, ma che allo stesso tempo lo rende un po' discutibile. Ad esempio per un buco nero di Schwarzschild abbiamo  $\alpha \propto M^2$ , per cui dovrebbe essere  $\Delta\alpha \propto M\Delta M$  e non a solo  $\Delta M$  come risulta. Al contrario (3.74) mostrava la giusta proporzionalità.

Penso che la maniera corretta di intendere la stima di Bekenstein sia tenendo sempre presente che stiamo parlando di una stima del *minimo* per l'incremento dell'area e non dell'incremento stesso, il quale ci aspettiamo che, al contrario, non dipenda dalle dimensioni della particella. Il significato di tale stima è quindi quello di escludere le situazioni limite, che si possono trovare teoricamente, in cui dell'entropia termodinamica scompare mentre l'entropia dei buchi neri rimane costante, argomentando che, tenendo conto della realizzazione pratica di tali situazioni, le condizioni sotto cui varrebbero non riescono a verificarsi completamente.

Utilizzando ora il risultato di Bekenstein, possiamo dare un ulteriore limite inferiore per  $\Delta\alpha$ , con l'idea che il raggio  $b$  della particella non possa essere inferiore al più grande tra il suo raggio di Schwarzschild e la sua lunghezza Compton, che ricordiamo essere definita come la lunghezza d'onda che avrebbe un fotone con energia pari alla massa a riposo della particella ( $\lambda_C = \hbar/\mu c$ ). In unità naturali abbiamo  $r_S = 2\mu$  e  $\lambda_C = 1/\mu$ , per cui

$$r_S > \lambda_C \quad \text{quando} \quad \mu > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{in metri, } \frac{G}{\sqrt{2}c^2} \text{ in kg}) \quad (3.85)$$

e viceversa. Nel primo caso abbiamo che  $2\mu b > 2\mu(2\mu) = 4\mu^2 > 2$  e nel secondo  $2\mu b > 2\mu(1/\mu) = 2$ . In entrambi possiamo stimare  $\Delta\alpha > 2$  (da intendersi come 2 aree di Planck), per cui ponendo  $S \equiv \tilde{f}(\alpha)$ , presso il minimo abbiamo:

$$\Delta S \cong \frac{d\tilde{f}}{d\alpha} \Delta\alpha = 2 \frac{d\tilde{f}}{d\alpha}. \quad (3.86)$$



Quando la particella finisce oltre l'orizzonte, non sappiamo esattamente quanta informazione perdiamo, ma sicuramente perdiamo almeno un bit corrispondente all'esistenza o meno di tale particella, ovvero possiamo porre  $(\Delta S)_{\min} = \ln 2$  (utilizzando quindi la base naturale del logaritmo per l'entropia di Shannon (1.14), anche se nulla ci vieterebbe di usarne un'altra). Comparando le due espressioni e integrando, otteniamo:

$$2 \frac{d\tilde{f}}{d\alpha} = \ln 2 \quad \implies \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\ln 2}{2} \alpha. \quad (3.87)$$

Con questi ragionamenti abbiamo trovato un possibile valore per la costante di proporzionalità che mancava nell'equazione (3.2); tuttavia, questa è una stima che può essere messa in discussione per le varie assunzioni fatte, anche se ragionevolmente ci si può aspettare che il valore corretto non sia troppo distante. Esso secondo Hawking [10] vale, infatti,  $\pi$  per rendere la corrispondente temperatura compatibile con l'usuale formula per la radiazione di corpo nero, che caratterizza la radiazione di Hawking. Nel seguito utilizzeremo pertanto tale relazione:

$$S_{BH} = \pi\alpha = \frac{1}{4} A. \quad (3.88)$$

### 3.7.1 Oscillatore armonico

Abbiamo ora tutti gli elementi per mettere alla prova l'espressione (3.88), per vedere se preserva la validità del secondo principio della termodinamica in presenza di un buco nero. Cominciamo con uno degli esempi fisici più facilmente trattabili analiticamente, ovvero l'oscillatore armonico.

Consideriamo due masse  $m/2$  collegate da una molla di costante  $k = m\omega^2/4$  (poiché la massa ridotta è  $m/4$ ) racchiusa all'interno di una scatola a temperatura  $T = 1/\beta$ . Svolgiamo una trattazione non relativistica per cui supponiamo  $T \ll m$ , che corrisponde a un'energia cinetica media molto minore della massa a riposo. Quantisticamente sappiamo che le energie permesse sono [7]

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \quad (3.89)$$

e che nell'insieme canonico la probabilità di trovarsi nell' $n$ -esimo stato è

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad (3.90)$$

dove

$$Z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = e^{-\frac{\beta\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\omega})^n = \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\omega}} \quad (3.91)$$

e dunque

$$p_n = e^{-\beta\omega n} (1 - e^{-\beta\omega}). \quad (3.92)$$

Si noti come la scelta dell'insieme canonico ci permette di massimizzare l'entropia termodinamica, poiché abbiamo visto nella sezione 1.6 che la distribuzione dell'insieme canonico massimizza l'entropia ad energia media fissata. Ci permette di metterci, cioè, nella condizione in cui "scompare" la massima entropia che possiamo associare all'oscillatore, per mettere alla prova quanto più possibile l'entropia dei buchi neri.

L'entropia calcolata secondo la formula di Shannon (1.14) risulta

$$S = - \sum_n p_i \ln p_i \quad (3.93)$$

$$= (1 - e^{-\beta\omega}) \sum_n e^{-\beta\omega n} (\beta\omega n - \ln(1 - e^{-\beta\omega})) \quad (3.94)$$

$$= (1 - e^{-\beta\omega}) \left[ \frac{\partial}{\partial(\beta\omega n)} \sum_n e^{-\beta\omega n} - \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \sum_n e^{-\beta\omega n} \right] \quad (3.95)$$

$$= \frac{\beta\omega}{e^{\beta\omega} - 1} - \ln(1 - e^{-\beta\omega}). \quad (3.96)$$

E' interessante aggiungere e sottrarre  $\beta\omega/2$  e ricordare (3.15) per ottenere l'energia media  $E$ :

$$S = \frac{\beta\omega}{e^{\beta\omega} - 1} + \frac{\beta\omega}{2} - \ln(1 - e^{-\beta\omega}) - \frac{\beta\omega}{2} \quad (3.97)$$

$$= \beta \left( \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} + \frac{\omega}{2} \right) + \ln \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\omega}} \quad (3.98)$$

$$= \beta \left( \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} + \frac{\omega}{2} \right) + \ln Z \quad (3.99)$$

$$\implies E = \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} + \frac{\omega}{2}. \quad (3.100)$$

Utilizziamo i risultati della sezione precedente, per i quali  $\Delta S_{BH} = \pi \Delta\alpha > 2\pi\mu b$ . In questo caso la massa totale dell'oscillatore vale  $\mu = m + E$ , conseguentemente la massa del sistema oscillatore più scatola eccederà questo valore; inoltre  $b$  dev'essere sicuramente maggiore di metà della separazione media  $y$  tra le masse e in particolare dello spostamento medio  $\Delta y$  dalla posizione di equilibrio. Per il teorema del viriale [7] l'energia potenziale è uguale a metà dell'energia media:

$$\frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}E \implies \Delta y = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{E}{m}} \quad (3.101)$$

$$b > \frac{1}{2}y > \frac{1}{2}\Delta y = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E}{m}} \quad (3.102)$$

$$\Delta S_{BH} > 2\pi(m + E) \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E}{m}} = \frac{2\pi E}{\omega} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \quad (3.103)$$

dove abbiamo definito  $\xi = \sqrt{m/E}$ .

L'entropia termodinamica scompare del tutto quando l'oscillatore supera l'orizzonte degli eventi, ovvero  $\Delta S_T = -S$  e globalmente si ha:

$$\begin{aligned}\Delta(S_{BH} + S_T) &> \frac{2\pi}{\omega} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \left( \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} + \frac{\omega}{2} \right) - \frac{\beta\omega}{e^{\beta\omega} - 1} + \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \\ &\equiv 2\pi \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \left( \frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{x}{e^x - 1} + \ln(1 - e^{-x})\end{aligned}\quad (3.104)$$

definendo  $x \equiv \beta\omega$ . Poiché la precedente è un'espressione che contiene molti parametri, ci limitiamo a trovare il minimo per  $x$  a  $\xi$  fissato, che in base alla definizione di questi ultimi significa far variare  $\beta\omega$  a  $m/\omega$  fissato, purché rimanga valida l'approssimazione non relativistica.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\pi \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \left( \frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{x}{e^x - 1} + \ln(1 - e^{-x}) \right] \quad (3.105)$$

$$= -2\pi \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} - \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{e^x - 1} \equiv 0 \quad (3.106)$$

$$\implies x_m = 2\pi \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \quad (3.107)$$

Per le nostre assunzioni  $\xi \gg 1$  e quindi  $x_m \gg 1$ , per cui la funzione valutata nel minimo è positiva e vale circa  $x_m/2$ . La variazione totale di entropia è dunque sicuramente in accordo col secondo principio della termodinamica per un oscillatore non relativistico.

### 3.7.2 Fascio di luce

Un altro esempio interessante per mettere alla prova l'entropia dei buchi neri è quello di un fascio di luce lanciato contro un buco nero. Svolgeremo l'analisi considerando dapprima un fascio ad una certa temperatura con un'elevata densità di fotoni, successivamente ne ridurremo la temperatura per cercare di violare la seconda legge della termodinamica generalizzata ma vedremo come questo ci costringa a ridurre drasticamente la densità di fotoni nel fascio, tanto da arrivare a considerare un singolo quanto che però non è sufficiente a violare tale legge.

Per una determinata frequenza  $\omega$  abbiamo le energie

$$E_n = n\omega, \quad (3.108)$$

che è la stessa espressione di un oscillatore armonico tranne che per l'energia di punto zero. A parte quest'ultima, pertanto, anche l'energia media  $E(\omega)$  e l'entropia  $S(\omega)$  avranno la stessa forma dell'esempio precedente.

Se consideriamo che il fascio occupi un volume  $\mathcal{V}$ , abbiamo l'usuale densità degli stati del corpo nero [7]:

$$\mathcal{D}(\omega) = 2 \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} 4\pi\omega^2 = \frac{\mathcal{V}}{\pi^2} \omega^2 \quad (3.109)$$

dove il fattore 2 è dovuto alle due polarizzazioni della luce. Per il corpo nero sappiamo che integrando  $S(\omega)$  su tutte le frequenze pesate con la densità degli stati si trova [7]

$$S = \frac{4}{3} \mathcal{V} \sigma T^3 = \frac{4}{3} \frac{E}{T}, \quad (3.110)$$

dove  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann e con  $E$  indichiamo l'energia *totale* integrata su tutte le  $\omega$ .

Dobbiamo però limitarci a considerare le lunghezze d'onda molto più piccole del raggio di Schwarzschild  $r_S = 2M$  (approssimazione dell'ottica geometrica) per essere sicuri che entriamo nel buco nero, che significa scartare una parte dello spettro della distribuzione di Planck, la quale ha un massimo per  $\omega_{\max} \approx T$ , in accordo con la legge di Wien [7]. Affinché ciò che abbiamo appena calcolato sia approssimativamente valido, abbiamo bisogno che:

$$\lambda_{\max} \ll M \quad \Longrightarrow \quad \omega_{\max} \gg \frac{1}{M} \quad \Longrightarrow \quad T \gg \frac{1}{M}. \quad (3.111)$$

$$\Delta S = -\frac{4}{3} \frac{E}{T} \quad \Longrightarrow \quad |\Delta S| \ll \frac{4}{3} ME. \quad (3.112)$$

Combinando invece (3.74) e (3.88) abbiamo che

$$\Delta S_{BH} \geq 2\pi\eta ME \quad \text{con } \eta \in [1 - \sqrt{3}/2, 8] \quad (3.113)$$

per cui sicuramente

$$\Delta(S_{BH} + S) > 0. \quad (3.114)$$

Se invece abbassiamo la temperatura tanto che  $\omega_{\max} \lesssim 1/M$ , allora per l'approssimazione dell'ottica geometrica abbiamo la necessità di tagliare la parte di spettro attorno al massimo, limitandoci alle frequenze  $\omega \geq \omega_c \gg 1/M$  per una certa  $\omega_c$  caratteristica, cioè a quelle frequenze per cui  $\omega \gg T \implies \beta\omega \gg 1$ . Come conseguenza di ciò, (3.110) viene leggermente modificata in  $S = E/T$ , che sembrerebbe divergere per  $T \rightarrow 0$  permettendo una violazione del secondo principio della termodinamica quando

$$\Delta(S_{BH} + S) = \left(2\pi\eta M - \frac{1}{T}\right) E < 0 \quad \Longrightarrow \quad T_{BH} > T \quad (3.115)$$

definendo  $T_{BH} \equiv (2\pi\eta M)^{-1}$ . Tuttavia, se calcoliamo il numero di fotoni

nel fascio, anche solo per  $T = T_{BH}$ , scopriamo che:

$$N = \int_{\omega \geq \omega_c} d\omega \mathcal{D}(\omega) \frac{1}{e^{-\beta\omega} - 1} \quad (3.116)$$

$$\cong \int_{\omega \geq \omega_c} d\omega \mathcal{D}(\omega) e^{-\beta\omega} \quad (3.117)$$

$$= \frac{\mathcal{V}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \int_{\omega \geq \omega_c} d\omega e^{-\beta\omega} \quad (3.118)$$

$$\cong \frac{\mathcal{V}}{\pi^2} \omega_c^2 T_{BH} e^{-\beta\omega_c} \quad (3.119)$$

da cui deduciamo che il volume medio per fotone è:

$$\frac{\mathcal{V}}{N} \cong 2\pi^3 \eta \frac{e^{\beta\omega_c}}{(\beta\omega_c)^2} M^3 \gg M^3, \quad (3.120)$$

essendo per ipotesi  $\beta\omega_c \gg 1$  e poiché l'esponenziale cresce più della potenza 2. Ma, dovendo il fascio avere una sezione più piccola di  $M^2$ , questo implica che la distanza media sia molto maggiore delle dimensioni del buco nero, che significa che non è più corretto parlare di un fascio continuo di luce e che le formule ricavate non sono più valide in tale regime di temperatura.

Piuttosto, è corretto considerare un singolo quanto con una determinata  $\omega$ . Esso ha due gradi di libertà equiprobabili per la polarizzazione, che per (1.14) corrispondono a un'entropia di  $\ln 2$ :

$$\Delta(S_{BH} + S) = 2\pi\eta \underbrace{M\omega}_{\gg 1} - \ln 2 > 0, \quad (3.121)$$

col risultato che anche in questo caso l'entropia dei buchi neri permette di mantenere valido il secondo principio della termodinamica.

### 3.8 Proposte alternative all'entropia di Bekenstein per i buchi neri

Abbiamo seguito il ragionamento di Bekenstein [1] per definire l'entropia dei buchi neri come  $S = \pi\alpha$ , sfruttando il parallelismo tra le equazioni (3.12) e (3.13), che riporto qui:

$$dE = T dS - p dV \quad (3.122)$$

$$dM = \Theta d\alpha + \phi dQ + \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{L} \quad (3.123)$$

dove

$$\Theta d\alpha = \frac{r_+ - r_-}{4\alpha} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{2\alpha} d\alpha. \quad (3.124)$$

In particolare abbiamo ottenuto la prima differenziando l'espressione (2.90) per  $\alpha$  e abbiamo identificato direttamente  $d\alpha$  come  $dS$ . Ci si

potrebbero però immaginare altre scelte guardando (3.124). Ad esempio la si potrebbe riscrivere come

$$\frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{2} d(\ln \alpha) \quad (3.125)$$

essendo  $d(\ln \alpha) = (1/\alpha) d\alpha$ , quindi si potrebbe pensare che  $S \propto \ln \alpha$ . Tale scelta per certi versi sembrerebbe anche più naturale poiché l'entropia termodinamica, che abbiamo visto coincidere in pratica con l'entropia di Shannon [9], è espressa generalmente tramite un logaritmo (in realtà bisogna sommare o integrare un logaritmo, per cui non è detto che alla fine debba sempre risultare  $S_{\text{termo}}$  proporzionale a un logaritmo).

Alternativamente, potremmo ipotizzare una proporzionalità del tipo  $S \propto \alpha^\varepsilon$ , per la quale si avrebbe:

$$\frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{2\alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{2\varepsilon\alpha^\varepsilon} d(\alpha^\varepsilon) \quad (3.126)$$

$$\implies \Theta' \propto M^{1-2\varepsilon} \quad (3.127)$$

Si noti come la nuova “temperatura” cresce con la massa per  $\varepsilon < 1/2$ , mentre diminuisce per  $\varepsilon > 1/2$  e infine è costante, rispetto alla massa del buco nero, se  $\varepsilon = 1/2$ . Quest'ultima scelta è stata già scartata nel paragrafo 3.2, poiché significherebbe porre l'entropia dei buchi neri proporzionale alla massa irriducibile di Christodoulou. Una scelta interessante potrebbe essere  $\varepsilon = 3/2$ , cosicché l'entropia sarebbe proporzionale al *volume* e non all'*area* del buco nero, ritrovando l'estensività rispetto al volume tipica dell'entropia termodinamica, che invece non è presente nella proposta di Bekenstein.

I “problemi” di (3.125) e di (3.126) sono però legati alla teoria di Hawking sull'evaporazione dei buchi neri [10]. Secondo tale teoria, tramite degli effetti quantistici, dai buchi neri uscirebbe la cosiddetta radiazione di Hawking, avendo come conseguenza una diminuzione della massa del buco nero. Tale radiazione coincide con lo spettro termico di un corpo nero ad una temperatura

$$T_{\mathcal{H}} = \frac{\Theta}{\pi} \propto \frac{1}{M}, \quad (3.128)$$

pensando a un buco nero con  $Q, a \ll M$ . Nelle unità SI, questo significa, ad esempio, che per un buco nero di poco più di una massa solare, che è la minima massa affinché un buco nero si formi per collasso stellare, la corrispondente temperatura sarebbe di qualche miliardesimo di kelvin [10]. I tentativi di misurare una tale radiazione, però, hanno finora fallito, per cui non è ancora verificato se l'ipotesi di Hawking sia corretta o meno.

La speranza a livello sperimentale è che durante il Big Bang si siano potuti formare dei buchi neri primordiali molto piccoli, che potessero evaporare ad una temperatura molto elevata e molto più velocemente (il

buco nero citato sopra, infatti, evaporerebbe in un tempo ben superiore all'età dell'universo).

Pertanto, solo il risultato originale di Bekenstein, che in realtà egli non sapeva come interpretare come una “vera temperatura”, è coerente con quanto ottenuto da Hawking e le altre proposte vanno scartate. Inoltre, sicuramente né (3.125) né (3.126) con  $\varepsilon < 1/2$  sono sostenibili poiché, predicendo una temperatura che cresce con la massa, sarebbero in contrasto con i dati osservativi finora raccolti. Infatti, in tal caso l'evaporazione sarebbe molto più rapida e intensa, dunque sarebbe già stata abbondantemente osservata.

La proposta (3.126) con  $\varepsilon > 1/2$  potrebbe ancora essere accettabile, tuttavia il lavoro di Hawking prevede proprio la  $\Theta$  di Bekenstein, a parte un fattore numerico costante, per cui, se la teoria di Hawking fosse verificata, dovremmo concludere senza dubbi che  $\varepsilon = 1$  come ipotizzato da Bekenstein.

Infine, un'interpretazione completamente diversa di (3.123) può essere la seguente: se consideriamo il primo principio “esteso” nel caso in cui il numero  $N$  di particelle non sia fissato, allora (3.122) dev'essere modificata in

$$dE = T dS - p dV + \mu dN, \quad (3.129)$$

dove  $\mu$  è il potenziale chimico [7]. Potremmo quindi pensare che  $\alpha$  diviso l'area di Planck sia un “numero di aree di Planck” e che  $\Theta$  sia l'analogo di  $\mu$ . Tale scelta però significherebbe porre nulla l'entropia dei buchi neri e, conseguentemente, ammettere che ci siano situazioni in cui smette di valere il secondo principio della termodinamica in presenza di buchi neri. Se pensiamo che questo non debba succedere, come ha immaginato Bekenstein, allora dovremmo abbandonare questa interpretazione o pensare a un altro modo di introdurre un'entropia per i buchi neri.





# Conclusioni

Abbiamo visto che l'articolo del 1973 di Bekenstein [1] parte dall'idea che il secondo principio della termodinamica sia una legge fondamentale della natura che non ammette deroghe. D'altra parte, in presenza di buchi neri, sembrerebbe facilmente violabile poiché, assieme ad un corpo che venisse assorbito da un buco nero, scomparirebbe dall'universo visibile anche l'entropia che tale corpo possiede. Tuttavia, se pensiamo che questo non debba poter accadere, come base fisica del nostro ragionamento, allora abbiamo la necessità di definire un'entropia anche per i buchi neri e di generalizzare il secondo principio.

Nei commenti del paragrafo 2.5, a dire il vero, abbiamo accennato al fatto che per un osservatore lontano dal buco nero un corpo non attraversa mai l'orizzonte degli eventi, ma rallenta sempre di più e la sua luce diventa sempre più fioca, rimanendo però, almeno in principio, all'interno dell'universo osservabile [10]. Potrebbe sembrare, quindi, che il problema posto sopra non sussista, tuttavia è anche vero che da un certo punto in poi perdiamo almeno la capacità di acquisire nuova informazione su tale corpo, poiché un segnale inviato verso di esso non tornerebbe mai indietro. La radiazione emessa da esso, inoltre, diventerebbe praticamente non rilevabile in un tempo effettivamente molto breve.

Per dare una specifica definizione di entropia dei buchi neri, Bekenstein sfrutta la legge, dimostrata da Hawking, la quale afferma che l'area dell'orizzonte degli eventi di un buco nero aumenta sempre, anche nel caso in cui due buchi neri si fondano [6]. In particolare, con i ragionamenti da me sviluppati nel paragrafo 3.6, abbiamo visto come, quando una sfera carica viene inglobata in un buco nero, l'energia di repulsione elettrostatica tra le cariche faccia esattamente in modo che l'area dell'orizzonte rimanga invariata nella migliore delle ipotesi. Pertanto, ponendo l'entropia dei buchi neri proporzionale all'area, le associamo automaticamente alcune delle proprietà che ci aspettiamo da una buona definizione di entropia.

E' importante sottolineare come la definizione di un'entropia comporti anche l'introduzione di una temperatura, che in questo caso identifichiamo come la "gravità di superficie"  $\Theta$  (3.11), a parte le costanti fisiche necessarie per dargli le giuste dimensioni.

Il principale lavoro che supporta l'interpretazione di tale "temperatura" come una vera e propria temperatura termodinamica è quello di Hawking sull'evaporazione dei buchi neri [10]. Dopo aver dimostrato, infatti, solamente tramite risultati della relatività generale, che l'area dell'orizzonte aumenta sempre, egli ha anche ipotizzato che, tramite effetti quantistici, i buchi neri possano emettere energia sotto forma di radiazione, "evaporando" lentamente.

Secondo Hawking lo spettro della radiazione emessa corrisponderebbe allo spettro di corpo nero a una temperatura  $\Theta/\pi$ . L'area dell'orizzonte diminuirebbe, però l'entropia termodinamica di questa radiazione sarebbe maggiore della diminuzione di entropia del buco nero. Purtroppo tale temperatura risulta estremamente bassa per i buchi neri che si possono formare da collasso stellare, tanto che le speranze di misurare direttamente la radiazione di Hawking sono piuttosto basse anch'esse. Se però si riuscisse a trovare una conferma sperimentale di ciò, sarebbe un grande successo, poiché rappresenterebbe la prima conferma sperimentale sia dell'entropia di Bekenstein che dello stesso lavoro di Hawking, i quali altrimenti rimangono argomenti di pura teoria.

Allo stesso tempo, tuttavia, l'idea di Hawking pone una serie di problemi teorici, conosciuti sotto il nome di "paradosso dell'informazione" poiché, almeno nel lavoro originale, la radiazione di Hawking è puramente termica, col risultato che dell'informazione viene distrutta per sempre. Fintanto che nulla poteva uscire da un buco nero, si poteva anche pensare che l'informazione non più accessibile nell'universo osservabile continuasse ad esistere all'interno, ma nel momento in cui questo non è più vero allora nascono delle difficoltà di interpretazione a livello quantistico, per il fatto che l'evoluzione di uno stato risulterebbe non più unitaria.

Detto ciò sul paradosso dell'informazione, ciò che veramente manca alla proposta di Bekenstein è un'interpretazione dell'entropia dei buchi neri in linea con la teoria di Shannon [9]. Il messaggio principale del capitolo 1 è che il concetto di entropia non può essere scisso da quello di *distribuzione di probabilità* dei microstati di un sistema fisico. Nel caso dei buchi neri, tuttavia, non è per niente chiaro quali dovrebbero essere i "portatori d'informazione", nè la loro distribuzione di probabilità (ad esempio per un gas sono le molecole che lo compongono).

Attualmente sono in corso numerosi sforzi per sviluppare tale interpretazione (fra i più noti, ad esempio, tramite la teoria delle stringhe), i quali si spera possano portare a una migliore comprensione dell'entropia dei buchi neri in un prossimo futuro.

# Bibliografia

- [1] Jacob D. Bekenstein. “Black Holes and Entropy”. In: *Phys. Rev. D* 7 (8 1973), pp. 2333–2346. DOI: 10.1103/PhysRevD.7.2333. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>.
- [2] Brandon Carter. “Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields”. In: *Phys. Rev.* 174 (5 1968), pp. 1559–1571. DOI: 10.1103/PhysRev.174.1559. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.174.1559>.
- [3] Demetrios Christodoulou. “Reversible and Irreversible Transformations in Black-Hole Physics”. In: *Phys. Rev. Lett.* 25 (22 1970), pp. 1596–1597. DOI: 10.1103/PhysRevLett.25.1596. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.25.1596>.
- [4] Demetrios Christodoulou e Remo Ruffini. “Reversible Transformations of a Charged Black Hole”. In: *Phys. Rev. D* 4 (12 1971), pp. 3552–3555. DOI: 10.1103/PhysRevD.4.3552. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.4.3552>.
- [5] D.J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. 3rd ed. Prentice Hall, 1999.
- [6] S. W. Hawking. “Gravitational Radiation from Colliding Black Holes”. In: *Phys. Rev. Lett.* 26 (21 1971), pp. 1344–1346. DOI: 10.1103/PhysRevLett.26.1344. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.26.1344>.
- [7] L.D. Landau e E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Vol. 5. Editori Riuniti, Edizioni Mir, 1986.
- [8] C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman e Company, 1973.
- [9] Claude Shannon. “A Mathematical Theory of Communication”. In: *Bell System Technical Journal* 27 (1948), pp. 379–423, 623–656.
- [10] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.

